
TECHNICKÁ MATEMATIKA

Jiří Škorpík, skorpik.jiri@email.cz

Obsah článku:		
Proč rozumět matematice a kdy toho využít v běžné technické praxi		1.3
Jak lze počítáním objevit nová čísla		1.5
Zaokrouhlování		1.8
Jednoduché ruční výpočty pomocí tužky a papíru		1.8
Konstrukce pravítek a nomogramů pro výpočty vzorců		1.9
Zpracování naměřených dat v logaritmické soustavě souřadnic		1.21
Sestavení rovnic ze zadaných parametrů		1.23
Obecná řešení rovnic		1.24
Numerická řešení rovnic		1.27
Stupně, nebo radiány?		1.30
Využití totálního diferenciálu neboli přírůstku funkce při popisu nějakého fyzikálního děje		1.31
Užití gradientů při popisu změn sledované veličiny v prostoru		1.35
Vlastnosti gradientů a práce s nimi ve vektorové analýze		1.37
Užití divergence vektoru v rovnicích zachování		1.42
Tenzor a jeho interpretace v technice		1.42
Rotace vektoru jako nástroj k odhalení vírového pohybu		1.43
Matematické stroje neboli počítače		1.46
Odkazy		1.51
Přílohy		1.53

Autor: ŠKORPÍK, Jiří

Datum vydání: Březen 2009, Zář 2023 (2. vydání)

Název: Technická matematika

Název on-line zdroje: Transformační technologie (transformacni-technologie.cz; turbomachinery.education; fluid-dynamics.education; stirling-engine.education)

ISSN: 1804-8293

Copyright©Jiří Škorpík, 2006-2023

Všechna práva vyhrazena.

Proč rozumět matematice a kdy toho využít v běžné technické praxi

Aktivní znalost matematiky

Může se zdát, že v běžné technické praxi v současném digitálním věku a masového používání výpočetní techniky jako by vymizela potřeba aktivní znalosti matematiky, respektive znalosti matematických vzorců a metod. Vývoj softwaru pokročil tak daleko, že stačí vědět "co", ale nikoliv už "jak". Byla ta několikaletá výuka matematiky vůbec k něčemu? Využijí to někdy? Na tyto otázky se pokusím v této kapitole odpovědět.

Matematika

Zadání

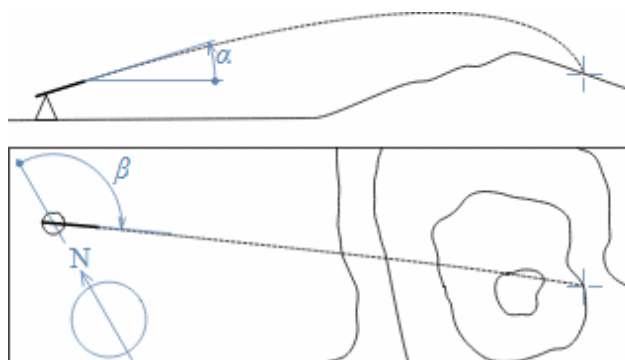
Výsledek

Balistický počítač

Podobnost

Matematiku v běžné technické praxi používáme jako abstraktního nástroje pro zpracování informací (zadání) za účelem jejich uspořádání podle požadovaných pravidel, ale častěji je nástrojem pro zpracování zadaných informací takovým způsobem, abychom získali konkrétní speciální informaci, kterou z prostých zadaných informací nelze lidskými smysly na první pohled vyčíst, nicméně ji nutně potřebujeme ke splnění nějakého úkolu. Běžně se tato speciální informace nazývá výsledkem. Příkladem vztahu zadání a výsledku je výpočet náměru a odměru děla pomocí balistického počítače tohoto děla. Zadáním v tomto případě je poloha děla, poloha cíle, parametry vzduchu, stav počasí, stav děla (počet výstřelů, teplota...), parametry náboje atd. Výsledkem jsou prakticky jen dvě čísla pro náměr a odměr (Obrázek 1), z nichž zadané parametry nelze zpětně odvodit. Současně ze zadání nelze prostými smysly náměr a odměr přesně stanovit, pouze zkušená obsluha by na základě podobnosti s předchozími výstřely byla schopna náměr a odměr prostými smysly odhadnout.

1:



α [°] náměr; β [°] odměr.

Postup

Zadání

Výsledek

Při matematickém postupu zpracování zadání nevznikají žádné nové informace, což znamená, že matematiky je v jistém smyslu jakýsi převodník zadaných informací do požadované "užitečné" podoby [Gecsei et al., 1964, s. 21], [Mareš, 2006, s. 42]. To znamená, že už v samotné zadání je výsledek skryt. A zde je první jsou první změny, které přináší digitální věk při zpracování zadání do podoby výsledku. Při zpracování zadání

postupoval výpočtář iteračně, tj. postupně objevoval cesty pro výpočet a i dodatečně stanovoval údaje, kterými bylo nutné doplnit zadání, aby získal požadovaný výsledek. V digitálním věku se zadání pro technika stává nejdůležitější složkou jeho práce, respektive už úplně na začátku musí mít velice podrobné zadání, aby se dostal ke správnému výsledku. A toho nedosáhne pokud nebu znát co je za digitálním výpočtem skryto za postup. Není nic nového na konstatování, že kvalita výsledku odpovídá kvalitě zadání, právě v tom se budou lišit výsledky výpočtářů, kteří rozumějí matematice od těch, které ji nerozumějí. Nicméně, po studiu matematiky díky přístupnosti výkonných výpočtových programů již "matematické převody" manuálně používat nebudete. Běžní inženýrské praxi lze opatrně podotknout, že je tedy důležitější vědět co než jak – s tím, že vědět co znamená, i to, že to řešitelné je.

Představitost
Studium

Pro inženýra je typické, že je schopen si pod rovnicemi něco konkrétního představit a to co si lze představit na to lze odpovědět přímo, bez složitého abstraktního počítání [Gowers, 2006]. Platí to i obráceně studium matematiky zvyšuje schopnost představit si i velmi složité procesy. Matematika je také hlavní prostředek při studiu technických oborů, bez které by nebylo možné vysvětlit přírodní zákonitosti, ze kterých inženýr vychází při návrhu a realizaci svých děl.

Rychlé a přibližné
výpočty
Kontrolní výpočet
Enrico Fermi
Děj

Rychlé přibližné výpočty se dělají obvykle bez elektroniky. Například pomocí počítání z paměti, pomocí tužky a papíru nebo pomocí předem připravených jiných výpočetních pomůcek. Především kontrolní výpočty je dobré provádět jiným nástrojem než byl proveden kontrolovaný výpočet, kvůli tzv. "autorské slepotě" a opakovaným překlepům s tím, že postačuje zkontrolovat, jestli se přibližný výsledek blíží přesnému výpočtu. Rychlé výpočty technici ocení také při práci v terénu pro získání rychlé orientace v problému. Občas už i přibližný výpočet umožňuje realizaci konkrétního díla a dostatečnou predikci jeho vlastností. Ostatně přibližné řádově přesné výpočty jako nástroj k pochopení děje prosazoval v USA už Enrico Fermi [Miodownik, 2016, s. 183]. To se potvrdilo i při vývoji atomových bomb, kdy někteří vědci byly schopni dělat velmi přesné předpovědi výsledků numerických výpočtů, které trvaly i několik měsíců, ale přitom bylo potřeba učinit závažné rozhodnutí hned [Jungk, 1965, s. 230].

Stres
Výpadek
Převodní pravítka
Nomogramy

Aktivní znalosti matematiky jsou nezbytnou součástí těch profesí, při kterých jsou sice využívány počítače, ale v případě jejich výpadku je ohrožena bezpečnost lidí nebo újmy na majetku. Takové situace navíc bývají obvykle současně dosti

stresující, takže je nutné být pro tyto situace speciálně školen včetně školení v použití jednoduchých výpočetních pomůcek, jako kalkulačky a převodníková pravítka či nomogramy. Například v případě výpadku balistického počítače výše musí obsluha, pomocí jednoduchých předem připravených pravítek a nomogramů, provést alespoň přibližné výpočty.

Technická matematika

Článek Technická matematika není souhrn matematických metod a důkazů jejich platnosti, ale spíše se zaměřuje na konkrétní nástroje pro kontrolní a rychlé výpočty a technickou interpretaci matematických vzorců a metod včetně uvedení příkladů. Také se omezují pouze na to, že technické úlohy v prostoru mají pouze tři rozměry a při nestacionárních úlohách je čtvrtým rozměrem čas.

Jak lze počítáním objevit nová čísla

Pouze skrz pochopení toho co jednotlivá čísla vyjadřují, lze správně interpretovat výsledky a pochopit vztah mezi geometrií a algebrou neboli analytickou geometrií, jejíž pochopení je pro technika naprosto klíčové.

Přirozená čísla

Základním stavebním kamenem čísel jsou přirozená čísla jako 1, 2, 3, 4..., které mají přímou souvislost s fyzickým světem při označování množství (tři jablka, sedm dnů...). Až používáním matematických operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení) s přirozenými čísly byla objevena čísla další, nejprve jako mezivýsledky a později našla uplatnění i jako konečné výsledky.

Záporná čísla

Při odčítání předešlých typů čísel byla objevena čísla záporná (nejprve používaná pouze jako mezivýsledky) například $2-4=-2$. A proto musela vzniknout pravidla, jak s takovými čísly počítat, například bylo zavedeno, že násobením dvou záporných čísel vyjde číslo kladné, to je jedno z pravidel aritmetiky. Kdyby tomu tak nebylo a pravidlo by znělo například tak, že násobením dvou záporných čísel vyjde číslo záporné, musela by být aritmetická pravidla zvlášť pro kladná a záporná čísla [Stewart, 2013, s. 45] – prostě by počítání také šlo, ale bylo by to složitější.

Racionální čísla

Přímou souvislost s fyzickým světem mají i čísla racionální. Jedná se o čísla vzniklá podílem dvou přirozených čísel (například polovina jablka $1/2=0,5$). Výsledkem operace dělení nemusí být, a často ani nebývá, celé číslo, ale číslo desetinné, přičemž před i za desetinou čárkou může být libovolný ale konečný počet čísel.

Iracionální čísla

Na první pohled se zdá, že jakékoliv přirozené číslo lze dělit nekonečným počtem jiných přirozených čísel, a tak by bylo možné vyjádřit jakékoliv desetinné číslo, leč není tomu tak. Lze

celkem jednoduše dokázat, že například číslo $\sqrt{2} = 2,4142\dots$ nelze vyjádřit podílem dvou přirozených čísel (jednoduché důkazy, že toto číslo nelze vyjádřit jako zlomek přirozených čísel jsou uvedeny v knihách Jazyk matematiky a Matematické důkazy [Devlin, 2003, s. 31] a [Thiele, 1985, s. 113]). Čísla, která nelze takovým podílem vyjádřit se nazývají iracionální čísla.

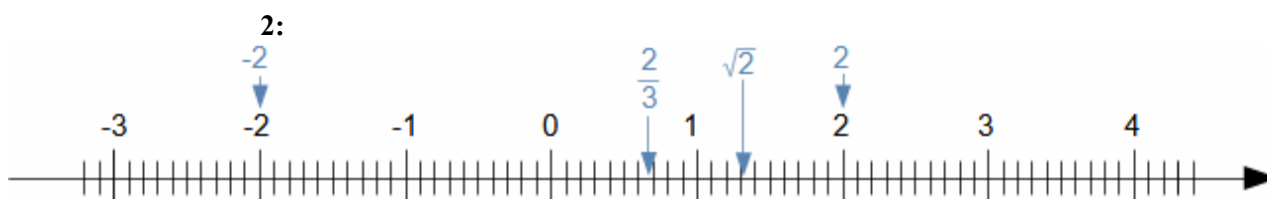
Reálná čísla

Nula

Představené typy čísel (přirozená, záporná, iracionální, racionální) jsou souhrnně nazývána jako čísla reálná, a hranice mezi kladnými a zápornými čísly je nula – při počítání má význam jako nic [Mazur, 2017, s. 92], prázdno apod. a není to reálné číslo (proto násobení nulou je nula a dělení nulou je nesmysl [Robinson, 2008, s. 39]). Někdy se uvádí při dělení nulou jako výsledek nekonečno (znak ∞), ale to jen ve speciálních případech, protože obrácená operace dělení je násobení a při násobení nekonečna nulou je výsledek opět nula a ne původní dělenec, více v knize Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta [Stewart, 2013, s. 93].

Osa reálných čísel

Reálná čísla a nulu lze znázornit i graficky pomocí osy, na které jsou seřazena čísla vzestupně zleva doprava, přičemž vzdálenosti mezi nimi jsou stejné, podle toho jak rozměrově velkou osu chceme vytvořit, viz Obrázek 2.



Množství vyznačených stupnic mezi dvěma přirozenými čísly označující dekadická racionální čísla $1/10, 1/100\dots$ (zde vyznačena pouze $1/10$) je dána pouze rozlišením, tj. vzdáleností přirozených čísel. Iracionální a některá racionální čísla nelze na ose reálných čísel nikdy přesně zakreslit (mohou mít nekonečně mnoho desetinných míst), pouze lze jejich polohu zpřesňovat vyčíslením jejich velikosti na co nejvíce desetinných míst. Šipka na pravé straně označuje směr růstu kladných čísel.

Imaginární jednotka

Gaussova rovina

Leonhard Euler

Komplexní číslo

Matematický dvojčlen

Postupem času se začaly objevovat ve výsledcích matematický dvojčlen ve tvaru $a + b\sqrt{-1}$. $\sqrt{-1}$ není to samé jako $\sqrt{1}$, protože 1^2 i -1^2 je 1. Nula to být nemůže, ta je jen jedna a znamená nic. Současně se jedná o jedno číslo, o kterém nevíme mezi jakými dvěma čísly by se mohlo na reálné ose čísel nacházet. To znamená, že když toto neidentifikovatelné číslo vynásobíme nebo k němu další číslo přičteme, tak stále výsledek nemůže ležet na reálné ose. Takže se jedná o nové číslo, které neleží na ose reálných čísel a pro lepší představivost jsme kvůli němu začali používat zcela nový systém os, abychom je mohli zapisovat, který nazýváme Gaussovou rovinou, viz níže.

Současně byl zaveden Leonhardem Eulerem pojem imaginární jednotka i [Devlin, 2003, s. 138], která je krátkým symbolem pro výraz $\sqrt{-1}$, takže uvedený matematický dvojčlen by šel zapsat ve tvaru $a \pm i \cdot b$ a nazýváme ho komplexním číslem. S komplexním číslem se pracuje jako s matematickým dvojčlenem akorát dělení je trochu složitější [Rektorys et al., 2003, s. 9] a je potřeba si dát pozor i na součin $i \cdot i$, který nemůže být roven 1, protože to už je reálné číslo. Komplexní číslo je čistě abstraktní veličina – je to produkt matematických pravidel.

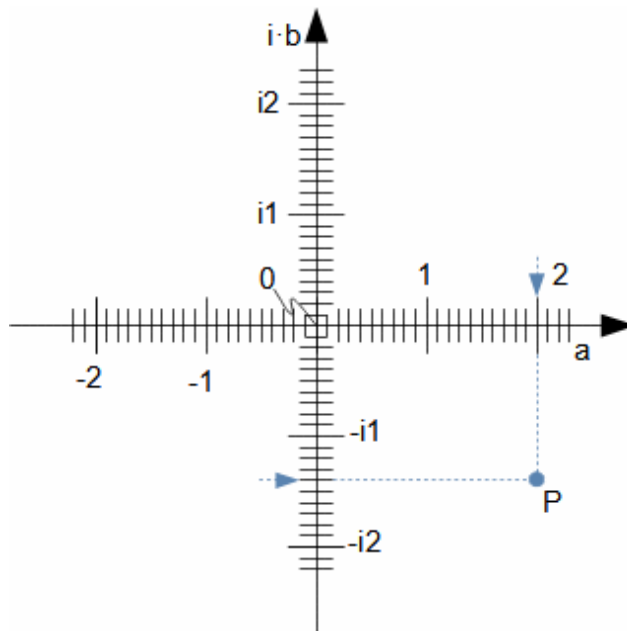
Komplexní číslo ve výpočtech

Výsledky ve tvaru komplexních čísel se poprvé začaly objevovat při řešení kvadratických rovnic a později i jako řešení diferenciálních rovnic. Takový výsledek se dá interpretovat více způsoby (pokud se nejedná o mezivýsledek, se kterým se dále pracuje). Vždy záleží na spojitosti s výpočtem, respektive co je vlastně počítáno.

Gaussova rovina

Gaussova rovina je tvořena dvěma vzájemně kolmými osami, proto ji také nazýváme i rovinou komplexních čísel. Na vodorovnou vynášíme hodnoty a , která má stejné vlastnosti jako osa reálných čísel – obsahuje i nulu. Nulou prochází osa čísel b , která má také vlastnosti osy reálných čísel a je kolmá k ose čísel a . Komplexní čísla se v takovém systému zakreslují tak, jak je znázorněno na Obrázku 3.

3:



Bod P je komplexní číslo $2 - i \cdot 1,4$ znázorněné v Gaussově rovině.

Při práci v rovině se v odborné literatuře velmi často používá algebra komplexních čísel (kde osa x je osou parametrů b a osa y osou parametrů a komplexního čísla), která defacto popisuje operace v rovině – zdůrazňují, že se využívá pouze algebra, takže ve skutečnosti se nejedná o práci s komplexními čísly, ale čísla reálnými. Komplexní číslo většinou není v technické praxi

přijatelný výsledek a musí se umět správně interpretovat co by to mohlo znamenat pro postup výpočtu nebo popisovaný děj.

Kvaterniony a
oktoniony

Mimo zmíněná čísla existují ještě čísla nazývaná kvaterniony a oktoniony [MAREŠ, 2008], ale ty se v běžné technické praxi už nevyskytují.

Zaokrouhlování

Pravidla
zaokrouhlování

Mezi základní problémy rychlých a přibližných výpočtů patří zaokrouhlování. V současné době díky počítačům není problém pracovat s čísly, které mají velký počet desetinných míst. Taková čísla jsou matematicky sice velmi přesná, ale v běžných technických případech těžko využitelná, zvláště pro přibližné a rychlé výpočty je lepší taková čísla zaokrouhlovat (zkracování čísla). Tři základní matematická pravidla zaokrouhlování, která jistě znáte, se dají shrnout do těchto tří příkladů: $4,335 \doteq 4,34 \doteq 4,3$, ale pokud se jedná o desetinné číslo končící číslicí 5 s následujícími nulami zaokrouhluje se obvykle na nejbližší sudé číslo: $4,38500 \doteq 4,38$, $4,37500 \doteq 4,38$ [Dobrovolný and Žďárek, 1954, s. 32]. Tzn. poslední dvojčíferné číslo končící číslem 4 a menším se zaokrouhluje směrem dolů, poslední dvojčíferné číslo končící číslem 6 a vyšším se zaokrouhluje směrem nahoru.

Dvoučíferné
zaokrouhlování

Pro rychlé přibližné výpočty se čísla zaokrouhlují obvykle pouze na dvoučíferné desetinné místo například: $4335 \doteq 4,3 \cdot 10^3$, $0,004335 \doteq 4,3 \cdot 10^{-3}$.

Zaokrouhlování v
technice

Zaokrouhlováním se dopouštíme jisté chyby. O teorii chyb bylo napsáno spousta knih, ale pro přibližné výpočty v technické praxi lze doporučit jedno "lidové" pravidlo a to zaokrouhlovat na stranu bezpečnou. To znamená, že počítáme-li přibližně nosnost nějaké konstrukce, tak zaokrouhlujeme čísla dolů. Konečný výsledek sice bude nepřesný, ale s vědomím, že skutečná nosnost bude vyšší a ne nižší. Naopak budeme-li počítat velikost zatěžující síly, tak zaokrouhlováním vždy nahoru bude výsledek nepřesný, ale s vědomím, že skutečná zatěžující síla bude menší apod.

Jednoduché ruční výpočty pomocí tužky a papíru

Počítání "pod sebou"
Sčítání a odčítání

Pokud chceme počítat bez kalkulačky či počítače s většími čísly, pak obvykle přistupujeme k počítání "pod sebou" pomocí tužky a papíru. Tzv. sčítání, odčítání pod sebou souvisí se zavedením pozičního systému zápisu arabských čísel [MAREŠ, 2008], [Struik, 1963], který se do západní Evropy dostal pomocí

Muhamad ibn Músa al-Chwárizmí

spisů perského učence Muhamad ibn Músa al-Chwárizmí (780-850) [MAREŠ, 2008], [Struik, 1963]. V takovém případě stačí napsat čísla pod sebe a jednotlivé řády k sobě přičítat, respektive odčítat. Připomenutí takového postupu je na Obrázku 4.

4:

$\begin{array}{r} 4346 \\ +6328 \\ \hline 10674 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6328 \\ -4346 \\ \hline 1982 \end{array}$	Při odčítání většího čísla od menšího je praktičtější jejich pozice přehodit a rozdíl doplnit znaménkem -.
--	--	--

Násobení a dělení

Operace násobení a dělení jsou obtížnější, co se týká výpočtů z hlavy. Podobně jako pro sčítání a odčítání tak i pro násobení a dělení lze provádět metodou "počítáním pod sebe". Při násobení se násobená čísla napíši pod sebe podle řádů jako u sčítání a postupně se vzájemně násobí jednotlivé řády činitelů, tyto násobky se na konci sečtou. Při dělení se hledají násobky dělitele, který se postupně odečítá od děleence. Připomenutí takového postupu je na Obrázku 5.

5:

$\begin{array}{r} 4346 \\ \cdot6328 \\ \hline 34273648 \\ +8692 \\ \hline 13038 \\ +260276 \\ \hline 275012488 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1346 : 23 = 50 \\ \underline{-1150} \\ 196 +5 \\ \underline{-115} \\ 81 +3 \\ \underline{12} \\ 58+12/23 \end{array}$	$\begin{array}{l} 8 \cdot 6, 8 \cdot 4+4, 8 \cdot 3+3, 8 \cdot 4+2 \\ 2 \cdot 6, 2 \cdot 4+1, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 6, 3 \cdot 4+1, 3 \cdot 3+1, 3 \cdot 4+1 \\ 6 \cdot 6, 6 \cdot 4+3, 6 \cdot 3+2, 6 \cdot 4+2 \end{array}$
---	---	---

Konstrukce pravítek a nomogramů pro výpočty vzorců

Sčítání a odečítání pomocí pravítka
Přesnost

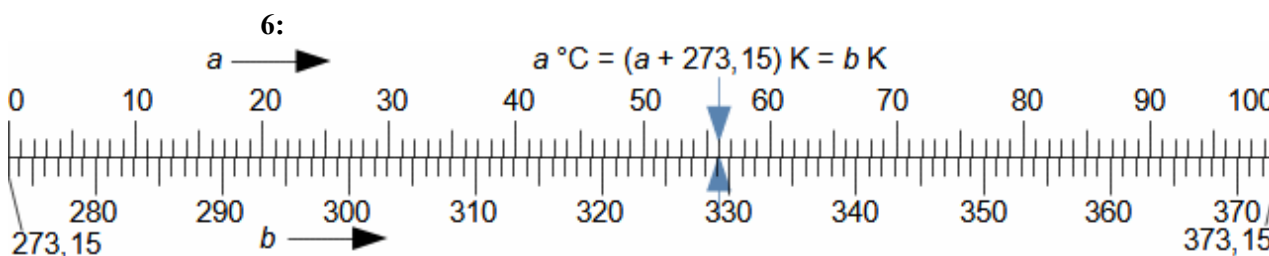
Rychlé zaokrouhlené sčítání a odčítání lze provádět pomocí analogových pomůcek jako je posuvné pravítko pro sčítání a odčítání. Posuvné pravítko je složeno ze dvou identických posuvných lišt s číselnou osou, kde jednotlivé stupnice musí být od sebe stejně vzdálené (vlastně se jedná o dvě osy reálných čísel). Takové pravítko lze vytvořit například ze dvou stejných pravítek pro rýsování. Jestliže chceme znát hodnotu a+b, pak první pravítko posuneme tak, aby ryska odpovídající nule měla naproti rysku odpovídající hodnotě a, výsledek pak odpovídá rysce na druhém pravítku, která ma naproti rysku prvního pravítka s hodnotou b. Vzhledem k omezení viditelnosti stupnice by pravítko o délce 20 centimetrů se stupnicí po 0,5 mm bylo schopno přičítat nebo odčítat čísla od 1 do 10 s přesností na 0,05 a pod.

Převodník aditivních jednotek

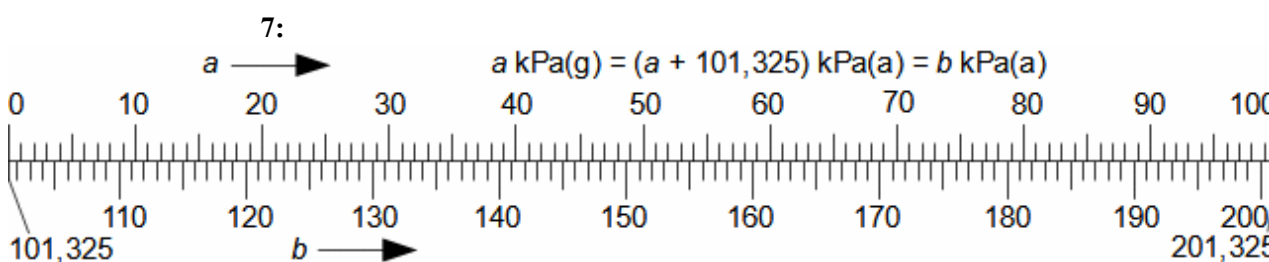
Takové pravítko, zvyšuje přesnost oproti přibližnému výpočtu "z hlavy" málo a nemá praktický smysl ho používat. Ale používá se jako převodník jednotek, přesněji pro převod mezi

Absolutní teplota
Atmosférický tlak

dvěma různými jednotkami stejné veličiny, které se od sebe liší pouze o nějakou přičtenou číselnou hodnotu. Například k naměřené teplotě ve stupních Celsia se musí přičíst teplota absolutní nuly (273,15 °C), pro získání teploty absolutní (Obrázek 6). Další podobný případ je práce s absolutním tlakem, kdy k odečtenému tlaku z manometru se musí přičíst tlak atmosférický (101,325 kPa), pro získání tlaku absolutního, viz Obrázek 7 (samozřejmě pro tlaky řádu desítek MPa už stačí připočítat jen jednu desetinu a převodník ztrácí smysl).



Převodník jednotek teploty v rozsahu 0 až 100 °C na absolutní teplotu v Kelvinech a obráceně: Na obrázku je vyznačen případ, kdy teploměr ukazuje 56 °C, pomocí narýsovaného pravítka velmi rychle vypočítáme, že tato teplota odpovídá 329,15 K.



Převodník přetlaku v rozsahu 0 až 100 kPa(g) na absolutní tlak a obráceně: Znak (a) v závorce označuje absolutní tlak, znak (g) označuje přetlak (ang. naměřený).

Stresová situace

S podobnými jednoduchými převodníky se můžeme setkat především v místech, kde mohou nastat stresující situace, kdy obsluha zařízení nemusí být schopna ani jednoduchých matematických úkonů.

Násobení a dělení
pomocí pravítka

Logaritmické pravítko

Složitější matematické operace jako je násobení a dělení lze provádět pomocí logaritmického pravítka založené na vlastnostech logaritmů, proto si nejprve řekněme něco o logaritmech. Každopádně Objev logaritmů měl na vědu dopad srovnatelný s vynálezem počítače [Tesařík, 2015].

Logaritmus čísla

Logaritmy jsou založeny na faktu, že každé kladné reálné číslo x lze vyjádřit umocňováním ve tvaru $x=n^y$ (záporná reálná čísla lze vyjádřit umocňováním pomocí algebry komplexních čísel). Logaritmus čísla je tak definován jako $\log_n n^y=y \cdot \log_n n=y \cdot 1$, kde n je základ umocňování, respektive logaritmu a $\log_n n=1$.

Dekadický logaritmus
Přirozený logaritmus
Eulerovo číslo

Nejčastěji se používají tzv. dekadické logaritmy, což je logaritmus o základu 10, a proto se zkráceně označují pouze log. Přirozený logaritmus se označuje ln (dříve lg), ten je o základu $e=2,71828\dots$ (tzv. Eulerovo číslo, které souvisí s nekonečnými řadami). V počtu pravděpodobnosti a informatice se také používá logaritmus o základu 2, tzn. \log_2 , který už speciální označení nemá. Logaritmy o různých základech lze převádět mezi sebou pomocí vztahu $\log_n x = (\ln x) / (\ln n)$. Log 0 je v matematice neurčitý výraz a pokud to lze definuje se jako $0 \cdot \log 0 = 0$ [Gecsei et al., 1964, s. 16].

Násobení a dělení
pomocí dekadického
logaritmu

Z vlastností logaritmů lze součin čísel a a b převést na součet dvou logaritmů takto: $a \cdot b = c \Rightarrow \log a + \log b = \log c = C$. Chceme-li zjistit hodnotu c . Pro výsledek c pak platí rovnost $c = 10^C$. Podobný převod lze provést při dělení čísel a a b : $a \cdot b^{-1} = c \Rightarrow \log a - \log b = \log c = C$. Algebra logaritmů je shrnuta v [Rektorys et al., 2003, s. 14].

8: Logaritmy čísel 1 až 100

x	log x	x	log x	x	log x	x	log x
1	0	26	1,4150	51	1,7076	76	1,8808
2	0,3010	27	1,4314	52	1,7160	77	1,8865
3	0,4771	28	1,4472	53	1,7243	78	1,8921
4	0,6021	29	1,4624	54	1,7324	79	1,8976
5	0,6990	30	1,4771	55	1,7404	80	1,9031
6	0,7782	31	1,4914	56	1,7482	81	1,9085
7	0,8451	32	1,5051	57	1,7559	82	1,9138
8	0,9031	33	1,5185	58	1,7634	83	1,9191
9	0,9542	34	1,5315	59	1,7709	84	1,9243
10	1	35	1,5441	60	1,7782	85	1,9294
11	1,0414	36	1,5563	61	1,7853	86	1,9345
12	1,0792	37	1,5682	62	1,7924	87	1,9395
13	1,1139	38	1,5798	63	1,7993	88	1,9445
14	1,1461	39	1,5911	64	1,8062	89	1,9494
15	1,1761	40	1,6021	65	1,8129	90	1,9542
16	1,2041	41	1,6128	66	1,8195	91	1,9590
17	1,2304	42	1,6232	67	1,8261	92	1,9638
18	1,2553	43	1,6335	68	1,8325	93	1,9685
19	1,2788	44	1,6435	69	1,8388	94	1,9731
20	1,3010	45	1,6532	70	1,8451	95	1,9777
21	1,3222	46	1,6628	71	1,8513	96	1,9823
22	1,3424	47	1,6721	72	1,8573	97	1,9868
23	1,3617	48	1,6812	73	1,8633	98	1,9912
24	1,3802	49	1,6902	74	1,8692	99	1,9956
25	1,3979	50	1,6990	75	1,8751	100	2

Příklad: Pro $4 \cdot 8$ musí platit $\log 4 \cdot 8 = \log 4 + \log 8$. Z tabulky $\log 4 = 0,6021$; $\log 8 = 0,9031$, odtud $\log 4 \cdot 8 = 1,5052$. Číslo 1,5052 je velice blízké číslu logaritmu čísla 32, takže můžeme tvrdit, že součin $4 \cdot 8$ bude velmi blízký číslu 32. Samozřejmě čím přesnější čísla v tabulce, tím lze očekávat přesnější výsledek.

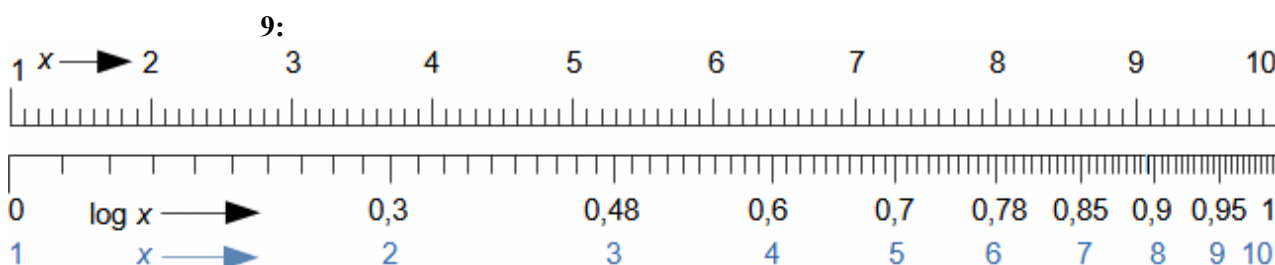
Hodnoty logaritmů
čísel

Taylorovy řady

Pro výpočty pomocí logaritmů je nutné znát hodnoty logaritmů. Ty se dříve tabelizovaly a první tabulky dekadických logaritmů publikoval Briggs (viz Tabulka 8). V té době vyčíslení logaritmů představoval pracný ruční výpočet přirozeného logaritmu a převodu na dekadický logaritmus. Současné matematické softwary a kalkulačky tyto tabulky obsahují nebo si je počítají v reálné čase numerickým způsobem na požadovanou přesnost pomocí Taylorových řad [Gecsei et al., 1964, s. 182].

Logaritmická stupnice

Všimněte si, že pokud hodnoty dekadických logaritmů vyneseme na osu (viz Obrázek 9) jsou hodnoty logaritmů jednotlivých řádů stejně vzdálené. To je dáno tím, že podíl mezi sousedními řády jsou stejné $10/1=100/10=1000/100\dots$ a tedy i rozdíl (vzdálenost) logaritmů sousedních řádů je stejný.

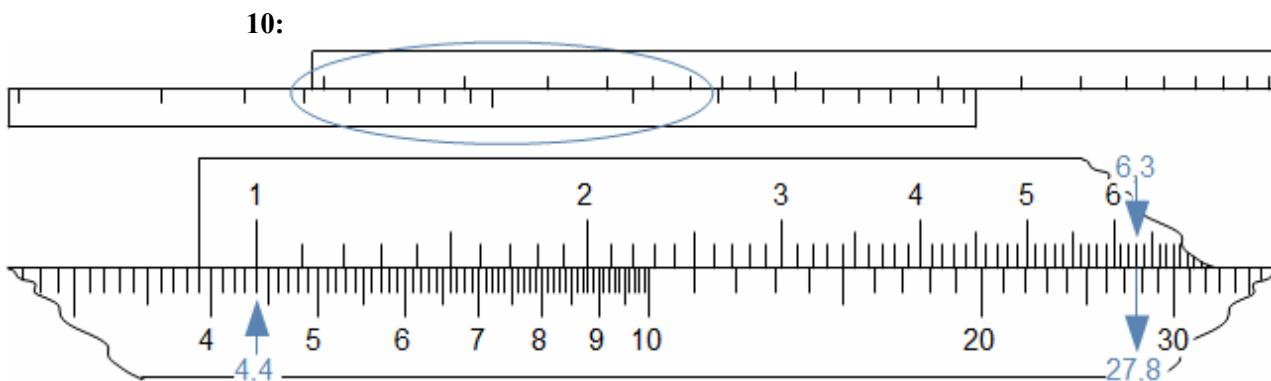


Horní osa je osa přirozených čísel od 1 do 10 o délce $\eta=17$ cm, takže jeden stupeň na stupnici je $1=1,7$ mm, dolní osa je logaritmická stupnice od 0 do 1 o délce $\zeta=17$ cm. Jednotlivé vzdálenosti mezi stupni logaritmické stupnice v mm se vypočítají jako poměr konkrétní logaritmické hodnoty ku logaritmické hodnotě celé stupnice. Takže $\log x$ musí být ekvivalentní vzdálenosti $\zeta(\log x - \log \min)/(\log \max - \log \min)$, v tomto případě $\log \min = \log 1=0$, $\log \max = \log 10=1$.

Logaritmické pravítko

Williamem
Oughtredem

I když se tabulky logaritmů udávaly na pět i více desetinných míst, k výpočtům prostých součinů se nepoužívali, protože rychlejší bylo násobení pod sebou. Pro rychlé přibližné výpočty se používalo logaritmické pravítko vynalezené anglikánským duchovním a matematikem Williamem Oughtredem (1575-1660). Logaritmické pravítko funguje stejně jako posuvné pravítko pro sčítání a odčítání s tím rozdílem, že obě stupnice odpovídají logaritmům čísel. Takže při násobení čísla 4,4 s číslem 6,3 stačí sečíst logaritmy těchto čísel na dvou zrcadlově otočených pravítkách s logaritmickou stupnicí (Obrázek 10). Při dělení se logaritmy odčítají.



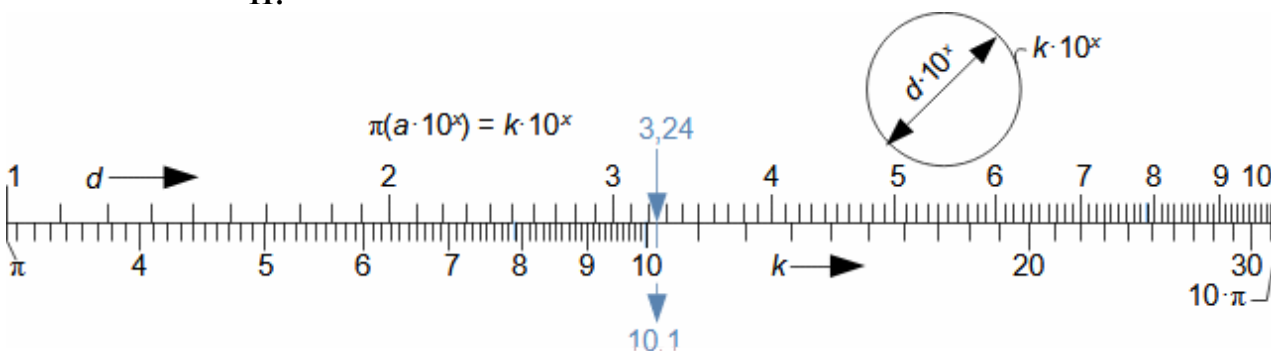
Na obrázku je zobrazen případ přibližného součinu čísel 4346 a 6328, pomocí dvou pravítek se stupnicemi od 0 do 20 rozdělených po log 0,1. Přibližný součin je proveden tak, že činitele se zaokrouhlí na 4400 a 6300, potom $4400 \cdot 6300 = 4,4 \cdot 6,3 \cdot 10^6$, respektive $\log 4,4 + \log 6,3 = \log 27,8 + \log 10^6$. Podle pravítka je výsledek $27,8 \cdot 10^6$, oproti přesnému výsledku je rozdíl 498 512, což odpovídá chybě 1,8 %.

Úloha 1: Určete výsledek výrazu $14\ 468,56^3$ pomocí logaritmů. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 1.

Logaritmické převodníky
 Výpočet obvodu kruhu
 Výpočet plochy kruhu

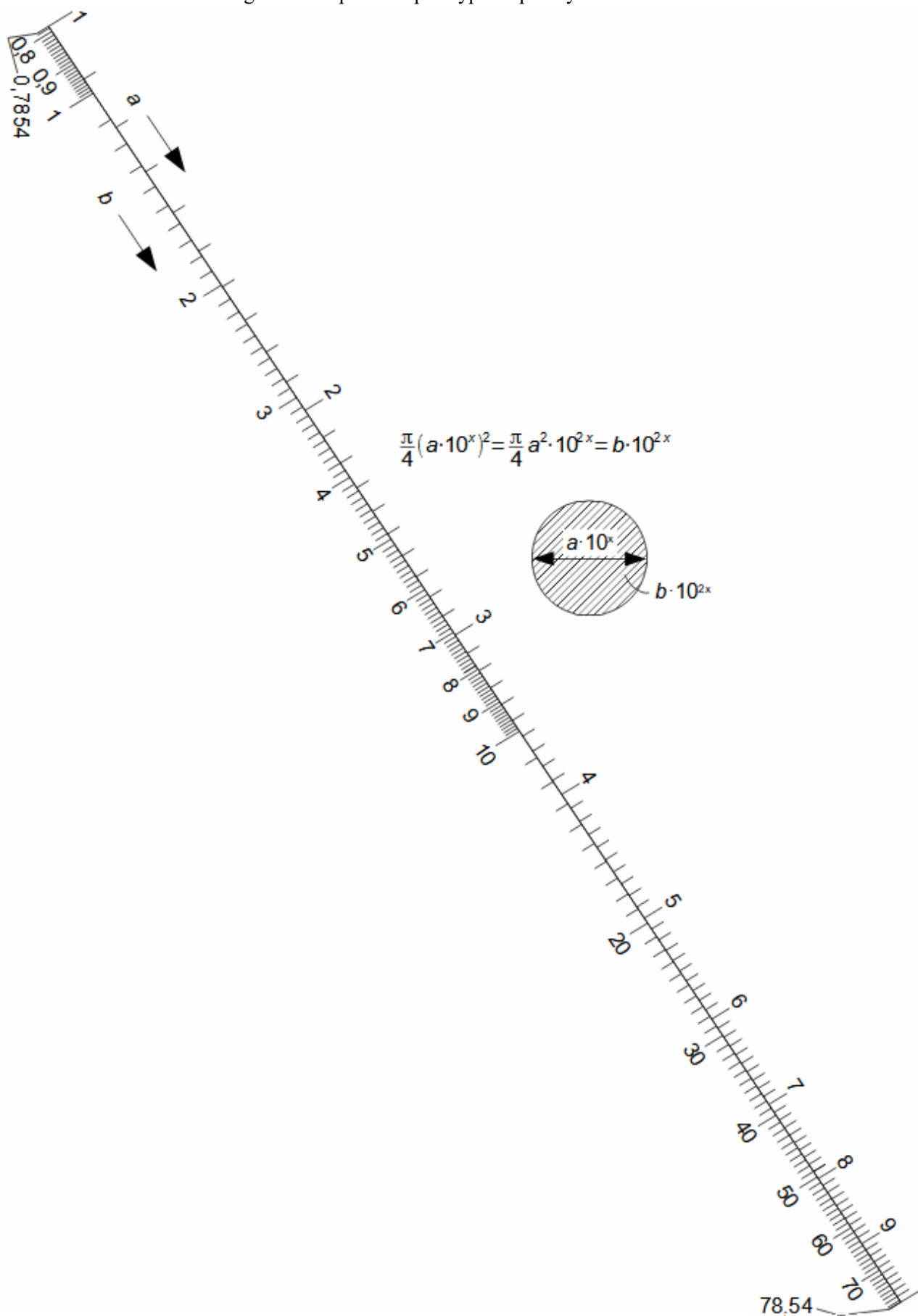
Nicméně logaritmické pravítko je také už archaická pomůcka, ale narýsované pravítko, které by násobilo stále stejnou hodnotu lze použít jako rychlý převodník, například pro rychlý převod fyzikálních jednotek, které jsou vzájemným násobkem nebo i pro výpočet obvodu či plochy kruhu jak ukazují následující Obrázky 11, 12 a dále Obrázky 13, 14, 15, 16, 17.

11:



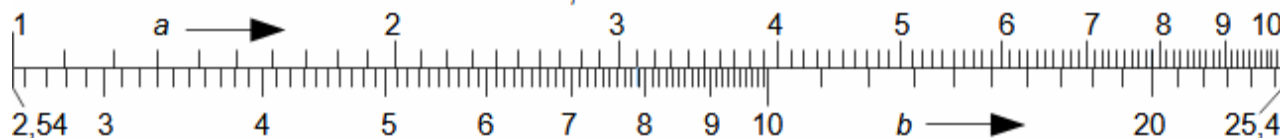
Logaritmické pravítko pro výpočet obvodu kruhu: Na pravítku je vyznačen příklad součinu čísla π a čísla 324 představující průměr kruhu, takže výsledkem bude obvod tohoto kruhu. Ten podle pravítka činí asi 1 010 ($x=2$), což představuje chybu od přesnějšího výsledku (1017,88) asi 0,77 %.

12: Logaritmické pravítko pro výpočet plochy kruhu



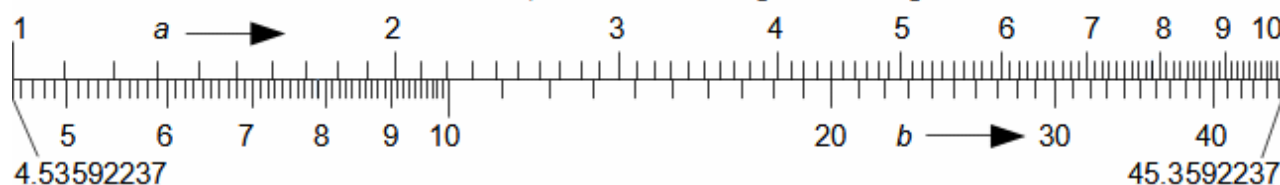
13: Převodník palců na milimetry

$$a \cdot 10^x \text{ in} = a \cdot 2,54 \cdot 10^{x+1} \text{ mm} = b \cdot 10^{x+1} \text{ mm}$$



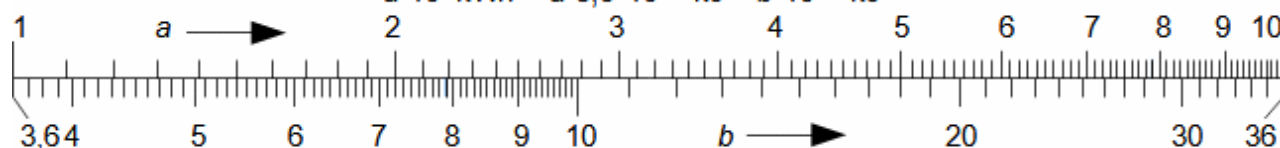
14: Převodník liber na kilogramy

$$a \cdot 10^x \text{ lb} = a \cdot 4,53592237 \cdot 10^{x-1} \text{ kg} = b \cdot 10^{x-1} \text{ kg}$$

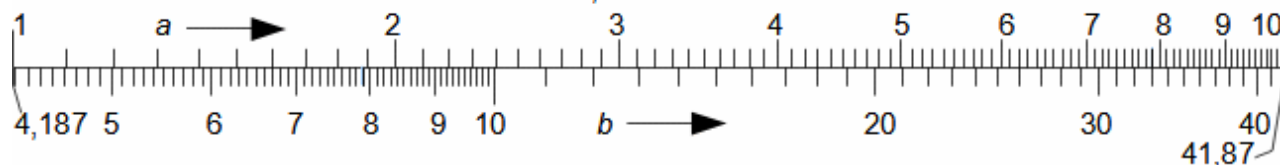


15: Převodníky jednotek energie

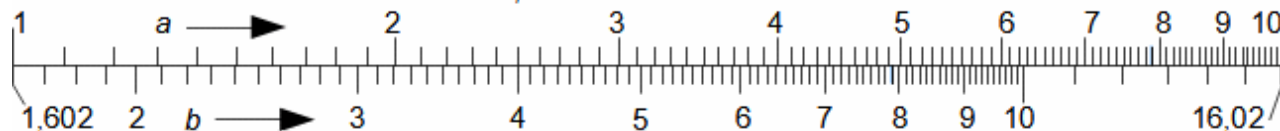
$$a \cdot 10^x \text{ kWh} = a \cdot 3,6 \cdot 10^{x+3} \text{ kJ} = b \cdot 10^{x+3} \text{ kJ}$$



$$a \cdot 10^x \text{ kcal} = a \cdot 4,187 \cdot 10^x \text{ kJ} = b \cdot 10^x \text{ kJ}$$

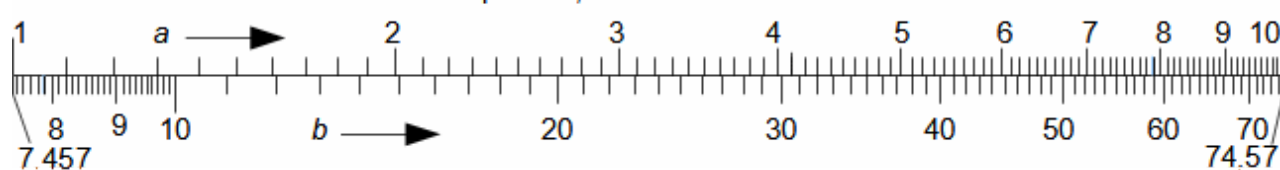


$$a \cdot 10^x \text{ eV} = a \cdot 1,602 \ 176 \ 621 \cdot 10^{x-19} \text{ J} = b \cdot 10^{x-19} \text{ J}$$



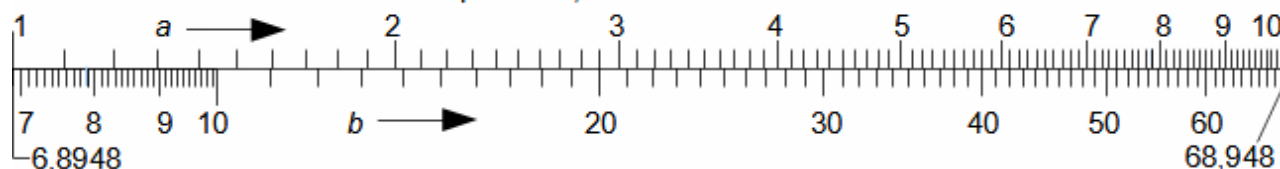
16: Převodník výkonu Britského koně (horse-power) na watty

$$a \cdot 10^x \text{ hp} = a \cdot 7,457 \cdot 10^{x+2} \text{ W} = b \cdot 10^{x+2} \text{ W}$$

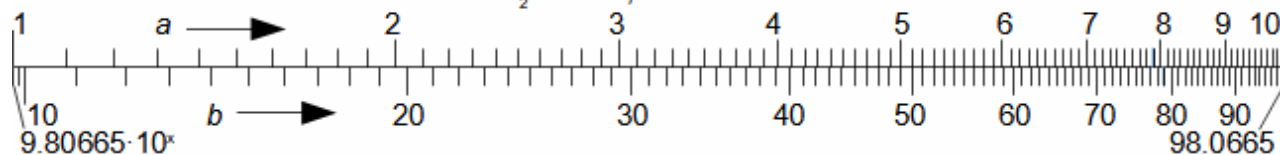


17: Převodníky jednotek tlaku

$$a \cdot 10^x \text{ psi} = a \cdot 6,8948 \cdot 10^{x+3} \text{ Pa} = b \cdot 10^{x+3} \text{ Pa}$$



$$a \cdot 10^x \text{ mm H}_2\text{O} = a \cdot 9,80665 \cdot 10^x \text{ Pa} = b \cdot 10^x \text{ Pa}$$



Konstrukce
logaritmického
převodníku

Pro konstrukci logaritmických stupnic pro konstrukci vlastních převodníků o velikosti 10^x až 10^{x+1} s přesností $0,1 \cdot 10^x$ můžete použít logaritmy čísel 1 až 100 uvedené v Tabulce 8 nebo podrobněji ve starší literatuře jako třeba Fyzikálně technické příručky [Jakovlev et al., 1963].

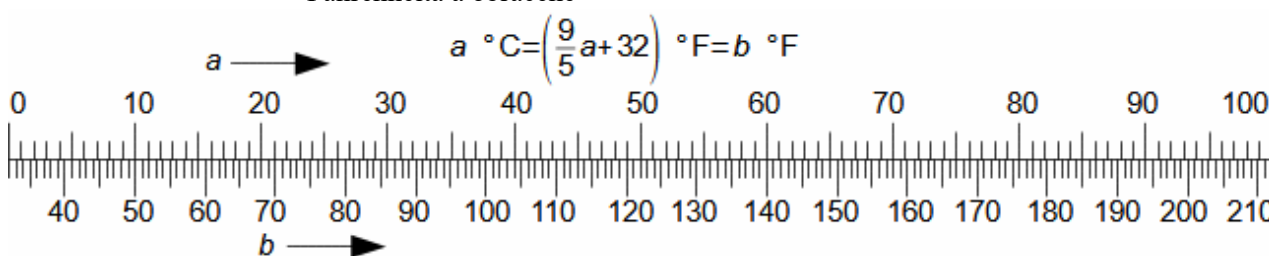
Přesnost převodníků

Vyšší přesností výpočtu, pomocí zobrazeného logaritmického pravítka, lze provést rozkladem činitele. Například při výpočtu kruhu na Obrázku 11 by šlo postupovat přesněji takto: číslo 324 lze rozložit na $324 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 4$, takže předchozí příklad by se počítal: $\pi \cdot 324 = \pi(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 4)$, odtud řešení 1015,4 s chybou už jen 0,24 %. Tento postup (více o něm například v knize Matematika pro dělníky a mistry [Kunc and Jozífek, 1963]) je sice přesnější, ale už postrádá rychlost a jednoduchost.

Nelogaritmické
převodníky

Stupnice převodníků, ve kterých figurují násobky nemusí být nutně logaritmické, ale pokud rozdíly v převáděných jednotkách nejsou velké, lze použít lineární stupnice s tím, že budou mít rozdílné vzdálenosti mezi jedním stupněm. Například převodník mezi $^{\circ}\text{C}$ a stupni $^{\circ}\text{F}$ pro rozsah 0 až 100°C a délce 17 cm bude mít na stupnici pro stupně Celsia vzdálenosti mezi stupni 1,7 mm, kdežto na stupnici stupňů Fahrenheita bude rozdíl jednoho stupně $5/9 \cdot 1,7 = 0,9444$ mm (stupeň Fahrenheita je $5/9$ stupně Celsia), navíc bude tato stupnice vůči předchozí stupnici posunuta o 32 dílků, viz Obrázek 18.

18: Převodník jednotek teploty v rozsahu 0 až 100°C na teplotu ve stupních Fahrenheita a obráceně



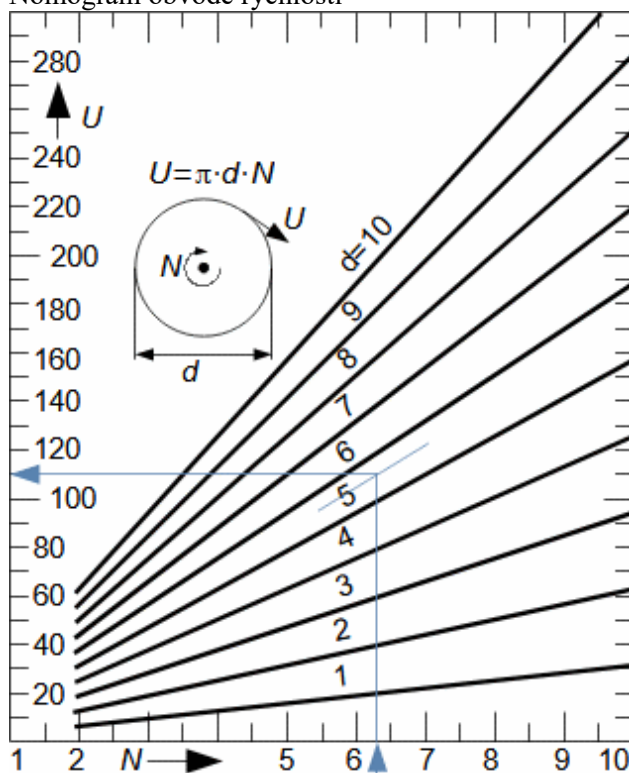
Vzorec s více
proměnnými
Nomogram

Pro výpočet vzorců s více proměnnými lze použít nomogramy. Nomogram je grafická analogová výpočetní pomůcka [Pleskot, 1947], [Štěpanský, 1970], [Evesham, 2010]. Jedná se o převod funkcí do grafické podoby ve vhodně vybraném soustavě souřadnic (nejčastěji pravoúhlé). Nomogramy vychází tedy z pravidel analytické geometrie v rovině [Devlin, 2003, s. 161], [Struik, 1963, s. 97], což jsou pravidla pro grafické vyjádření funkcí dvou proměnných. Nomogramy, na rozdíl od pravítek, umožňují rychlý výpočet rovnic více proměnných. Používají se pro rychlý přibližný výpočet často používaných vzorců.

Obvodová rychlost
Isopléta

Například nomogram pro výpočet obvodové rychlosti ($U = \pi \cdot d \cdot N$, kde U [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] je symbol a značka jednotky obvodové rychlosti, d [m] je průměr kola a N [s^{-1}] jsou otáčky) kola je tvořen přímkami, protože pro konstantní průměr kola je tato rovnice rovnicí přímky – křivka konstantních hodnot funkce se nazývá isoplétou, viz Obrázek 19. Takový nomogram lze zkonstruovat pouze pravítkem. Nutné je stanovit rozsah jednotlivých proměnných podle toho, které kombinace hodnot d a N nás zajímají.

19: Nomogram obvodé rychlosti



U [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]; d [m]; N [s^{-1}]. Osa otáček je v intervalu 1 až 10 s^{-1} , osa obvodové rychlosti kola 0 až 300 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Do oblasti řešení, která je vymezená vodorovnou osu hodnot pro otáčky a svislou pro obvodovou rychlost kola se zakreslují průběhy změn obvodové rychlosti v závislosti na otáčkách pro jednotlivé průměry kola (čára, na které je jedna z proměnných konstantní – v tomto případě průměr kola se nazývá isopléta). První isopléta byla nakreslena ze souřadnic $U=3,1415$ při $N=1$ do bodu $U=31,415$ při $N=10$. Následující isopléty byly nakresleny stejným postupem. Obvodová rychlost kola se odečte z průsečíku zadaných hodnot otáček a průměru kola.

Systém souřadnic
nomogramů

Osy soustavy souřadnic nemusí být u nomogramů navzájem kolmé, ale mohou svírat i jiný úhel než 90° . V systému skloněných os se poměrově zvětší či zmenší úhly mezi isoplétami a osami nomogramu. Například pokud by osa x svírala s osou y úhel 70° , pak by se úhel mezi isoplétami a osami zmenšil poměrem $70/90$ apod.

Problém přesnosti
nomogramu

Je očividné, že takový nomogram pro funkci dvou proměnných nemůže pokrýt všechny možnosti řešení v navrženém intervalu vstupních proměnných, to by musel obsahovat nekonečný počet isoplét, a nikoliv jen deset. Jestliže nomogram neobsahuje isoplétu splňující zadání, je nutné její průběh určit alespoň přibližně tak, jak naznačuje příklad výpočtu obvodové rychlosti pro $N=6,3 \text{ s}^{-1}$ a $d=5,6 \text{ m}$. Další problém přesnosti nomogramů tkví v jeho fyzické velikosti. Rozsah chyby

(chyba, která vznikne na délce 1 mm osy nomogramu) lze jednoduše stanovit z měřítka nomogramu. Tato chyba nemusí být na celé ploše nomogramu stejná. Například v případě posledního nomogramu v oblasti kolem $N=2$, $d=2$ bude vzdálenost 1 mm na ose obvodových otáček kola představovat chybu o velikosti $\sim 24\%$ a v oblasti $N=9$, $d=10$ chybě jen $\sim 1\%$.

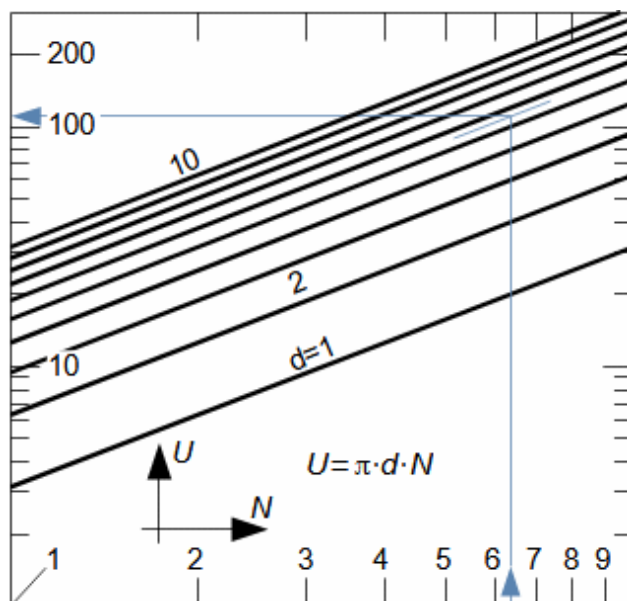
Výhody nelineárních stupnic

Rozdíly v přesnosti lze vyřešit nelineárními stupnicemi os, tak aby chyba v odečtu byla přibližně stejná na celé ploše nomogramu. Typ nelineární stupnice osy závisí na druhu rovnice, kterou nomogram zobrazuje, přičemž každá osa může mít jinou stupnici. Pro exponenciální rovnice (včetně exponentu 1) se nejčastěji používá logaritmická stupnice, ale ve speciálních případech lze použít stupnici kvadratické (pro kvadratické rovnice) atd.

Výhody logaritmické stupnice

V případě logaritmické stupnice je její výhoda i v tom, že jakékoliv exponenciální rovnice se dají znázornit jako přímky, například rovnice $a \cdot b^{3,4} = c$ bude přímkou ve tvaru $\log a + 3,4 \cdot \log b = \log c$ apod. Nomogram pro výpočet obvodové rychlosti kola v logaritmických stupnicích je zobrazen na Obrázku 20.

20:



Velikost tohoto nomogramu je $8,35 \times 8,35$ cm, takže chyba 1 mm v oblasti $N=2$, $d=2$ je asi $6,6\%$ a v oblasti $N=9$, $d=10$ je také $6,6\%$, přičemž přesnost lze zvýšit zvětšením velikosti plochy nomogramu a zvýšením hustoty stupnic. V logaritmické soustavě souřadnic tedy lze dosáhnout stejné přesnosti, respektive nepřesností na celé ploše nomogramu. Více o rozboru přesnosti v logaritmické soustavě souřadnic v [Pleskot,

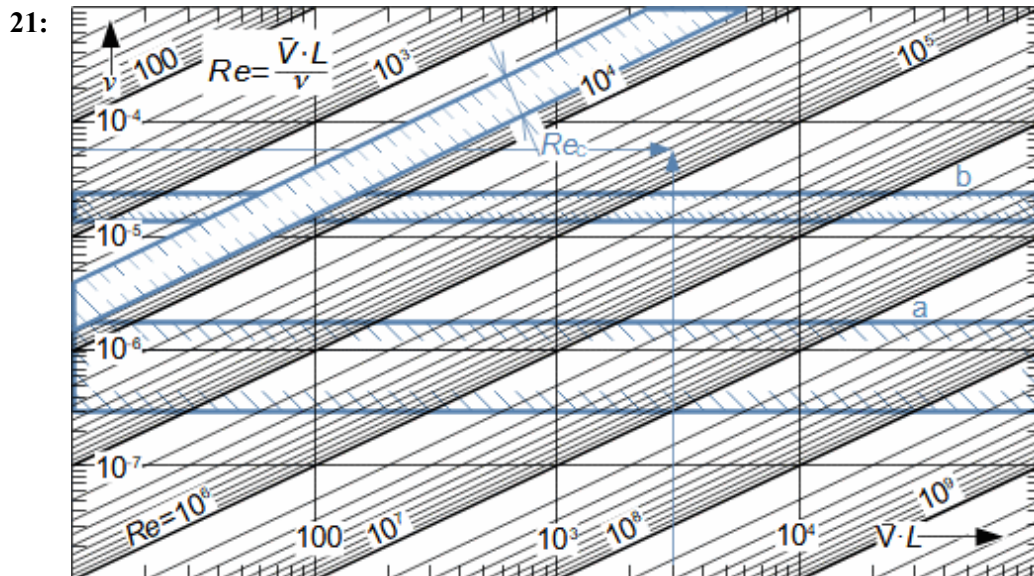
1947, s. 12].

Speciální oblasti nomogramů

Viskozita

Do jednoho nomogramu lze zakreslit i více rovnic, které mají stejné proměnné. Například do nomogramu pro obvodovou rychlost kola lze zakreslit i průběh pro kritické otáčky hřídele s tímto kolem, které se s průměrem kola budou měnit (kritické otáčky jsou funkcí průměru kola a tuhosti hřídele, která je v tomto případě stejná). V nomogramu lze také vyznačit různé oblasti, respektive kombinace, které jsou preferovány, nebo naopak nevhodné, či vyznačují něčím jiné významné oblasti –

například v Nomogramu 21 pro výpočet Reynoldsova čísla. Takto lze nomogramy personalizovat podle toho jakou oblastí se vlastník nomogramu zabývá.



Nomogram pro odečet Reynoldsových čísel: V [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] střední rychlost proudění; L [mm] charakteristický rozměr; ν [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$] kinematická viskozita; Re [1] Reynoldsovo číslo. a-rozsah kinematických viskozit vody mezi 0 °C a 100 °C; b-rozsah kinematických viskozit suchého vzduchu mezi 0 °C a 100 °C. Re_c [1] rozsah kritických Reynoldsových čísel pro potrubí. Obrázek je převzat z článku Vnitřní tření tekutiny a vývoj mezní vrstvy [Škorpík, 2023a]

Uživatelské
nomogramy

Nomogramy se také dodávají k různým výrobkům jako pomůcka pro koncového uživatele o změnách parametrů stroje při různých nastavení. Například nomogramy u soustruhů, pro odečet otáček nebo posuvu při změně převodového poměru, nomogramy regulačních ventilů, ze kterých lze vyčíst změnu průtoku a tlakové ztráty při změně zdvihu vřetena ventilu apod.

Sdružené nomogramy

Nomogram zvládne i více proměnných než jen dvě, takové nomogramy se nazývají sdružené. Jedná se vlastně o dva nomogramy, které mají jednu společnou stupnici, která slouží jako výstup prvního a vstup do druhého.

Průsečkové
nomogramy

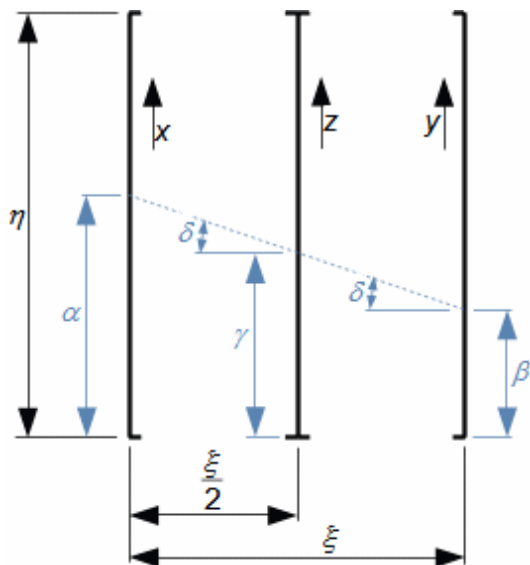
Doposud popsané typy nomogramů se nazývají průsečkové. Nevýhodou těchto nomogramů je obtížný odečet (hledání průsečíku tří různoběžných čar) i velká hustota čar, proto se koncovým uživatelům, kteří nejsou tak matematicky zdatní pokud to jde, dodávají graficky přehlednější spojnicové nomogramy.

Spojnicové
nomogramy

Spojnicový nomogram pro dvě proměnné je složen ze tří stupnic, na kterých jsou v příslušných měřítkách vyneseny hodnoty jednotlivých proměnných, respektive hodnoty počítané veličiny, viz nejjednodušší tvar spojnicového nomogramu Obrázek 22 tvořeného třemi přímkami z nichž jedna je uprostřed.

Konstruktor nomogramu musí navrhnout typ stupnic a jejich měřítka, jejich tvar a sklon i jejich vzájemné vzdálenosti tak, aby průsečíky na jednotlivých osách, které vzniknou nakreslením libovolné přímky, byly řešením příslušné rovnice.

22:



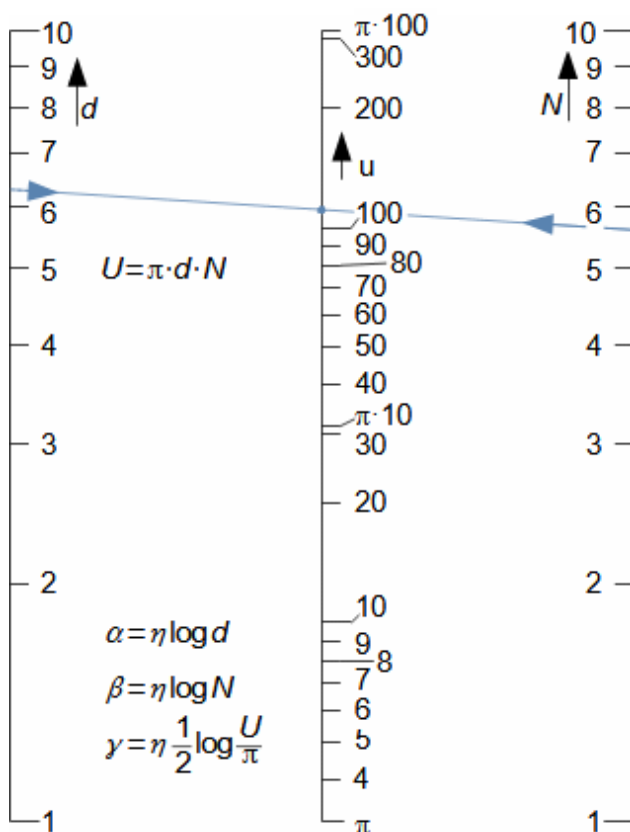
V tomto případě musí být jedna z os přesně uprostřed dvou dalších, ale lze ji podle potřeby posouvat, pokud se změní měřítko jedné z hlavních os – osa z bude přesně uprostřed, jestliže hlavní osy budou ve stejných měřítkách. Tento tvar spojnicového nomogramu je vhodný pro rovnice ve tvaru $\alpha + \beta = 2 \gamma$ (odvození je v Příloze 15), například $a \cdot x + b \cdot y = c \cdot z$, kde a, b, c jsou konstanty; například $x^2 + y^2 = z^2$, což je Pythagorova věta apod. Jestliže osy jsou logaritmické stupnice lze tento součtový spojnicový diagram také použít pro součin např. rovnici $x \cdot y = z$, která

bude mít v logaritmických souřadnicích tvar $\log x + \log y = \log z$, což už je rovnice přímky.

Obvodová rychlost kola

Příklad konstrukce spojnicového nomogramu je opět proveden na rovnici pro výpočet obvodové rychlosti kola, viz Nomogram 23. Všimněte si, že kdyby osa obvodových otáček U nebyla uprostřed, ale například blíže k ose průměrů, pak by se

23:



Postup konstrukce tohoto spojnicového nomogramu je popsána v Příloze 16.

musela měřítko těchto os různě změnit (měřítko osy průměrů více než osy rychlostí) a naopak. Proto je výhodné mít osu z uprostřed os hlavních.

Kombinované
nomogramy

Spojnicové nomogramy lze také konstruovat pro více jak tři proměnné spojením několika nomogramů tzv. sdružený spojnicový nomogram. Dokonce lze kombinovat průsečíkové nomogramy s nomogramy spojnicovými [Pleskot, 1947, s. 136], [Štěpánský, 1970, s. 215].

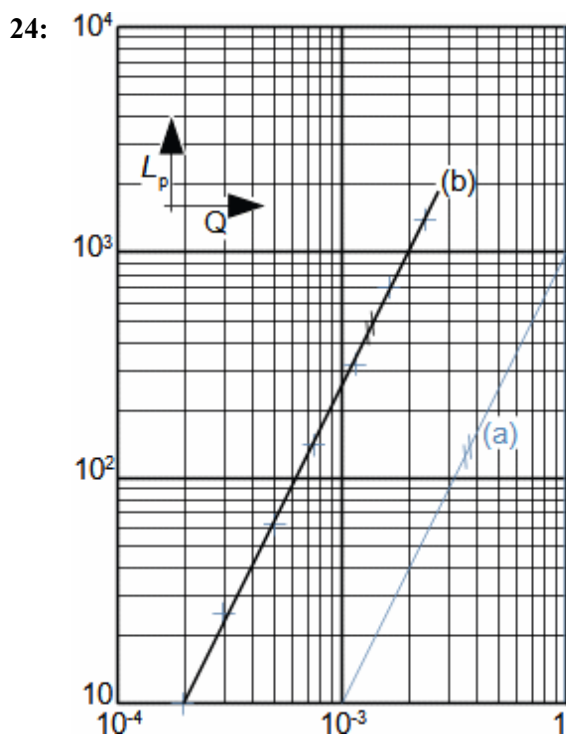
Podobnosti
nomogramů

Konstrukce nomogramů často vyžadují většího duševního úsilí a zkušeností. Ten kdo nemá dostatek zkušeností může vycházet při konstrukci nomogramu z podobnosti s jiným nomogramem (například tvarem řešené rovnice), přičemž lze čerpat z katalogů nomogramů uvedených v [Pleskot, 1947], [Štěpánský, 1970], [Opava, 1972].

Zpracování naměřených dat v logaritmické soustavě souřadnic

Exponenciální funkce
Logaritmická soustava
souřadnic
Tlaková ztráta potrubí

Při konstrukci nomogramů v logaritmické soustavě souřadnic využíváme ten fakt, že exponenciální funkce jsou přímkami. Tato vlastnost logaritmické soustavy souřadnic se využívá při zpracování dat, které byly získány při vyšetřování nějakého děje u něhož se předpokládá, že ho lze popsat nějakou exponenciální funkcí. Příklad takového využití je na Obrázku 24 je výsledek takové aplikace. Jedná se o úlohu, ve které je cílem



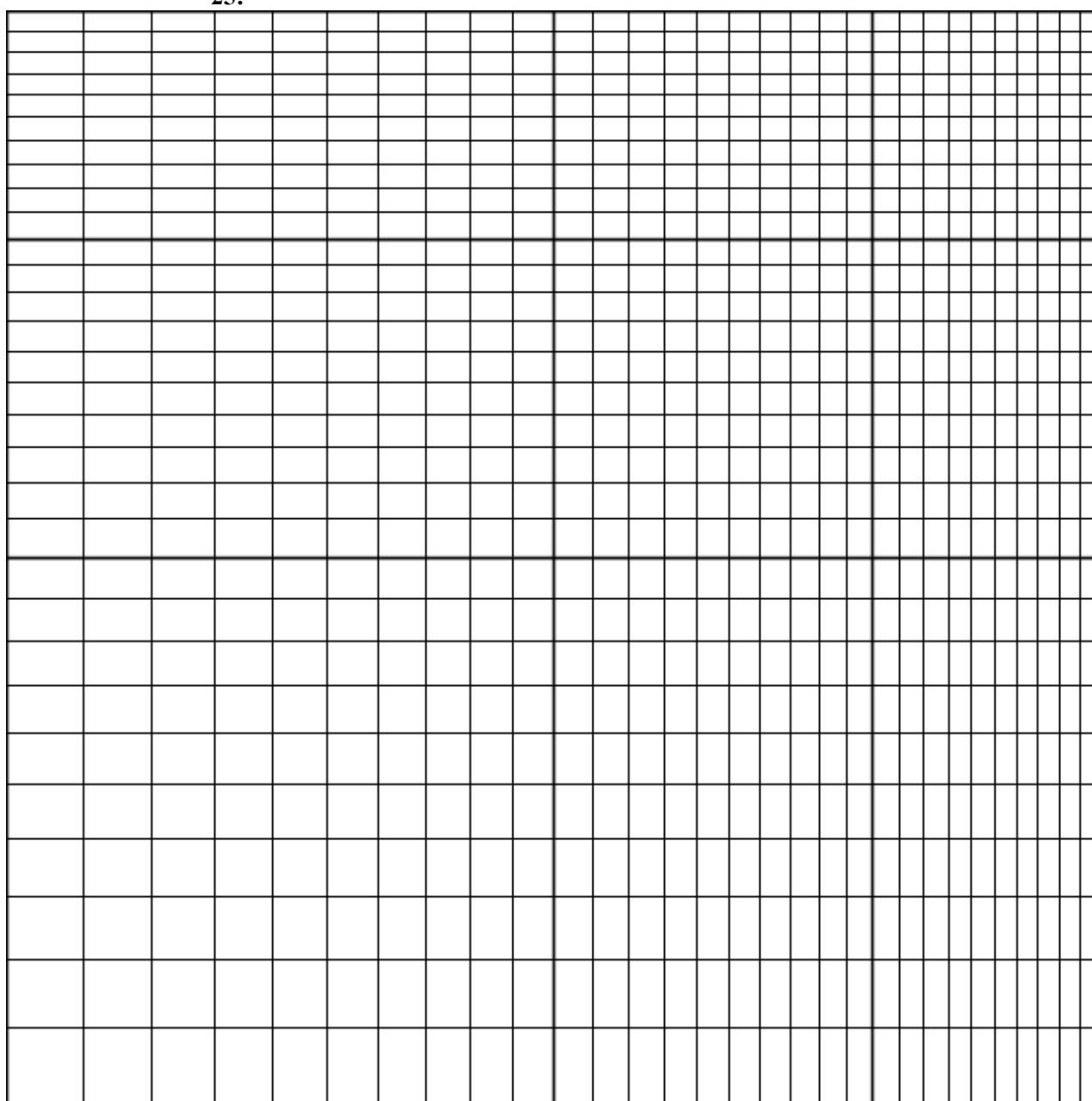
Určení exponenciální funkce popisující závislost tlakové ztráty na průtoku potrubím. Očekávaný tvar této funkce je $L_p = C_s \cdot Q^x$. V prvním kroku byla zanesena naměřená data do logaritmických souřadnic (modré křížky). V druhém kroku byly tyto body proloženy přímkou (b). Víme, že směrnice přímky v logaritmické soustavě souřadnic představuje hodnotu exponentu x , a jelikož je přímka (b) rovnoběžná s přímkou (a), která představuje exponenciální rovnici s exponentem 2, je očekávaná hodnota exponentu x 2. Hodnotu konstanty C_s lze pak určit z jakéhokoliv bodu na přímce (b), pro který odečteme hodnoty pro L_p a Q a následně dosadíme do rovnice. L_p [Pa] tlaková ztráta, $[m^3 \cdot s^{-1}]$ průtok; C_s $[kg \cdot m^{-7}]$ konstanta. Obrázek je převzat z článku Vznik tlakové ztráty při proudění tekutiny a její výpočet [Škorpík, 2023b].

určit tzv. charakteristiku potrubního systému, kterým protéká voda. Měřena je tlaková ztráta potrubí, označovaná jako L_p , v závislosti na objemovém průtoku Q tímto potrubím, přičemž cílem je sestavit rovnici, která by tyto změny tlakové ztráty při změně průtoku predikovala, tedy rovnici $L_p=f(Q)$.

Logaritmický papír

Pro aproximaci naměřených dat přímkou v logaritmické soustavě souřadnic se využívá výpočetní technika, ale vedle výpočetní techniky lze použít i ruční přístup pomocí logaritmického papíru. Za tímto účelem je na Obrázku 25 zobrazen logaritmický papír o velikosti 17x17cm a v rozsahu tří řádů.

25:



Sestavení rovnic ze zadaných parametrů

Rovnice
Vzorec

Typickým zadáním složitějších úloh je nějaká soustava rovnic. Technik obvykle tyto zadávací rovnice musí umět sestavit na základě zadání. Rovnice nejčastěji získáme kombinací dvou a více jednoduchých vzorců. Sestavování rovnic je ryze lidská schopnost, při které postupujeme systematicky po krocích, které jsou přehledné a srozumitelné, což se nejlépe ukáže na Úloze 2. V rámci této úlohy je představeno i možný postup řešení této úlohy, respektive soustavy rovnic.

Úloha 2: Vypočítejte jakou vzdálenost ujela tramvaj mezi dvěma zastávkami, když víte, že ze zastávky nejdříve zrychlovala stálým zrychlením $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ po dobu 7 s, pak 24 s jela ustálenou rychlostí a nakonec zpomalovala ustáleným zpomalením $-2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ do zastavení. Sestavení rovnic této úlohy a jejich řešení je popsáno v následujícím odstavcích označených §1 až §3.

Sestavení rovnic
 x_n jako symbol pro
neznámou

§1: Ze zadání úlohy je zřejmé, že výsledná rovnice bude obsahovat minimálně dva typy vzorců, a to vzorec pro výpočet ujeté vzdálenosti při rovnoměrně zrychleném/zpomaleném pohybu a vzorec pro výpočet ujeté vzdálenosti při konstantní rychlosti. Vzorec pro výpočet ujeté vzdálenosti při rovnoměrně zrychleném/zpomaleném pohybu má tvar $l=1/2(a\cdot t^2)$ a vzorec pro rychlost na konci rovnoměrného zrychlení z nuly má tvar $V=a\cdot t$ [Macháček, 1995, s. 39], kde l [m] je ujetá vzdálenost; t [s] je čas; V [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost v čase t a a [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$] je zrychlení (záporné číslo je zpomalení). Celkovou ujetou vzdálenost si označme jako x_1 (písmeno x se používá k označení veličin, které nejsou známy, respektive nejdou jednoduše ze zadání vyčíst), vzdálenost při rovnoměrném zrychlení x_2 , vzdálenost ujetou konstantní rychlosti x_3 a vzdálenost ujetou při zpomalování x_4 . Je evidentní, že celková vzdálenost x_1 bude součtem vzdáleností x_2 , x_3 , x_4 a x_5 , viz soustava rovnice 27.

$$27: \begin{aligned} x_1 &= x_2 + x_3 + x_4 & x_5 \text{ [m}\cdot\text{s}^{-1}] \text{ rychlost tramvaje na konci zrychlování – je označena} \\ & & \text{písmenem } x, \text{ protože je to také neznámá.} \\ x_2 &= \frac{1}{2} a_2 \cdot t_2^2 = 49 \\ x_3 &= x_5 \cdot t_3 = x_5 \cdot 24 \\ x_4 &= x_2 \\ x_5 &= a_2 \cdot t_2 = 14 \end{aligned}$$

Soustava rovnic
Parametry rovnic
Podmínka řešitelnosti

Výsledná skupina rovnic se nazývá soustavou pěti rovnic o pěti neznámých. Konstanty v rovnicích označujeme jako parametry rovnice. Sestavená soustava rovnic má řešení pouze tehdy rovná-li se počet neznámých počtu dostupných rovnic a

současně jsou všechny rovnice na sobě nezávislé, tj. žádnou z rovnic nelze odvodit ze zbývajících. Ale naopak velmi často můžeme mít k dispozici více rovnic než neznámých, pak vybereme pro řešení počet rovnic odpovídající počtu neznámých.

Numerické řešení §2: Nyní jsou v podstatě dvě možnosti jak dosáhnout požadovaného výsledku neboli řešení těchto pěti rovnic. Myšlenkově nejméně náročné je postupně vypočítat jednotlivé neznáme dosazením hodnot za zrychlení a čas (vyčíslení neznámých x_4 , x_3 a dosazením do první rovnice pro x_1 její výpočet), jak je již naznačeno při zápisu rovnic – takovýto postup se nazývá numerické metoda či řešení. Druhou možností je z těchto pěti rovnic udělat jen jednu, respektive vytvořit relativně složitý vzorec pro přímý výpočet ujeté vzdálenosti tramvaje, takové řešení se označuje také jako obecné.

Obecné řešení §3: Obecné řešení je výsledek algebraických úprav rovnic, při kterém soustavu rovnic převedeme na vzorce ve formě $x_i = \dots$. Takový vzorec vznikne tzv. postupným dosazováním do první rovnice, kdy za jednotlivé neznámé $x_2 \dots x_5$ se dosazují rovnice pro jejich výpočet, tak aby na pravé straně nebyla žádná neznámá, viz postup uvedený na Obrázku 28, kde je výsledku dosaženo prakticky jen ve dvou krocích.

$$28: \quad 1: x_1 = \frac{1}{2} a_2 \cdot t_2^2 + x_5 \cdot t_3 + x_2$$

$$2: x_1 = \frac{1}{2} a_2 \cdot t_2^2 + a_2 \cdot t_2 \cdot t_3 + \frac{1}{2} a_2 \cdot t_2^2 = a_2 \cdot t_2^2 + a_2 \cdot t_2 \cdot t_3 = 434 \text{ m}$$

Obecné řešení soustavy Rovnic 27.

Numerické vs. obecné řešení

Nevýhodou výsledného Vzorce 28 (v tomto případě nás zajímalo řešení jen proměnné x_1) je, že nejsou okamžitě patrné mezivýsledky, které bývají u složitějších úloh důležité, protože z nich plyne celková představa o situaci a lépe se hledají ve výpočtu případné chyby a jsou patrné vlivy jednotlivých členů na výsledek, například jestli při zvyšování hodnoty jedné veličiny ujetá vzdálenost klesá nebo naopak roste atd.

Obecná řešení rovnic

Algebraické úpravy
Separace
Osamostatňování

Základem nalezení obecného řešení rovnic/e jsou algebraické úpravy. Ty spočívají postupných úpravách rovnic, tak abychom separovali, respektive osamostatnili vyšetřovanou neznámou, například u rovnice $2,54 + a = b \cdot x^2 + (2x^2 + c)d$ je potřeba separovat neznámou x . To se dělá vhodnými promyšlenými algebraickými operacemi, při kterých musí být zachována rovnost pravé a levé strany rovnice.

Například, přičítáním stejného čísla k pravé i levé straně rovnice tak, aby byla zachována její rovnost. To samé pravidlo platí i pro jiné matematické operace včetně umocňování, logaritmování atd. Postup separace neznámé x je zobrazen na Obrázku 29.

$$\begin{array}{ll}
 29: & 2,54+a=b \cdot x^2+(2x^2+c)d & 4: & \frac{2,54+a-c \cdot d}{b+2 \cdot d}=x^2 \frac{b+2 \cdot d}{b+2 \cdot d} \\
 & 1: 2,54+a=b \cdot x^2+2 \cdot d x^2+c \cdot d & 5: & \frac{2,54+a-c \cdot d}{b+2 \cdot d}=x^2 \\
 & 2: 2,54+a-c \cdot d=b \cdot x^2+2 \cdot d x^2+c \cdot d-c \cdot d & 6: & \sqrt{\frac{2,54+a-c \cdot d}{b+2 \cdot d}}=x \\
 & 3: 2,54+a-c \cdot d=x^2(b+2 \cdot d) & &
 \end{array}$$

V tomto případě stačilo 6 kroků a výpočet veličiny x už nebude problém. Do uvedených šesti kroků jsem zahrnul i zjednodušování rovnice, například kroky 2 a 3 zkušební výpočtáři slučují apod.

Substituce

Především při úpravách je dobré rovnici co nejvíce zjednodušit, taky abychom se v ní neztráceli a nemuseli neustále opisovat spoustu symbolů. Například během úprav Rovnice 29 lze x^2 označit zkráceně například symbolem y a v kroku 5 opět dosadit x^2 , tomu se říká substituce. Také se může vyskytnout logaritmická rovnice a místo x^2 v předchozí rovnici může být například $\log 2x$ opět by šlo za tento výraz při úpravách dosadit symbol y a v pátém kroku dosadit zpět $\log 2x$ apod.

Kanonický tvar rovnice
Obecná řešení

Pro mnoho typů rovnic, které řešíme už vyřešené byly a je známo jejich obecné řešení, které lze velmi rychle transformovat pro naše potřeby. Takové obecné řešení vyšetřované soustavy rovnic nalezneme pouze ve dvou krocích. Nejprve převedeme vyšetřované rovnice na tzv. kanonický tvar, což je jakýsi normalizovaný zápis rovnice. Následně pro výsledné kanonické tvary odečteme obecné řešení z dostupného souhrnu matematických vzorců.

Lineární rovnice
Exponenciální rovnice

Kanonické tvary lineárních a exponenciálních rovnic s celými exponenty jsou uvedeny na Obrázku 30. Samozřejmě parametry a, b mohou být a také v praxi často bývají rovny nule, takže rovnice $x^3+C=0$, kde C je konstanta, je stále kubická rovnice a její kanonický tvar je $1 \cdot x^3+0 \cdot x^2+0 \cdot x^1+C=0$,

$$\begin{array}{ll}
 30: & a_{11} x_1+a_{12} x_2+a_{13} x_3+\dots+a_{1n} x_n=b_1 & a_0 x^2+a_1 x+a_2=0 \\
 & a_{21} x_1+a_{22} x_2+a_{23} x_3+\dots+a_{2n} x_n=b_2 & a_0 x^3+a_1 x^2+a_2 x+a_3=0 \\
 & a_{31} x_1+a_{32} x_2+a_{34} x_3+\dots+a_{3n} x_n=b_3 & \vdots \\
 & \vdots & \vdots \\
 & a_{n1} x_1+a_{n2} x_2+a_{n3} x_3+\dots+a_{nn} x_n=b_n & a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\dots+a_n=0
 \end{array}$$

vlevo kanonické tvary lineárních rovnic (bez exponentů); **vpravo** kanonické tvary polynomů druhé, třetího až n -tého stupně (pro $n \geq 1$) – neboli kvadratická, kubická rovnice atd. a_{21} znamená, že se jedná o konstantu z druhého řádku před první neznámou.

Odtud lze snadno stanovit kanonický tvar soustavy rovnice 27 a kvadratické Rovnice 29, které jsou uvedeny na Obrázku 31.

$$\begin{array}{ll}
 31: & x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 0 = 0 \\
 & 0 + 0 + x_3 + 0 - 24x_5 = 0 \\
 & 0 - x_2 + 0 + x_4 + 0 = 0 \\
 & 0 + x_2 + 0 + 0 + 0 = 49 \\
 & 0 + 0 + 0 + 0 + x_5 = 14
 \end{array}
 \qquad
 (b+2 \cdot d)x^2 - (2,54+a-c \cdot d)=0$$

vlevo kanonický tvar soustavy Rovnic 27. **vpravo** kanonický tvar kvadratické Rovnice 29.

Obecná řešení
lineárních rovnic

Obecné řešení lineární rovnice o jedné a dvou neznámých je uvedeno na Obrázku 32, obecná řešení kanonických tvarů soustav lineárních rovnic o více jak dvou neznámých se už obvykle neuvádí, protože jsou velmi rozsáhlá, ale principiálně lze odvodit obecné řešení pro libovolně rozsáhlou soustavu lineárních rovnic, ale výsledné vztahy by byly také rozsáhlé velmi nepřehledné. Proto se u soustav lineárních rovnic větších jak 3 (kromě triviálních případů) se používá mechanická numerická metoda řešení, viz kapitola Numerická řešení rovnic.

$$\begin{array}{ll}
 32: & x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \\
 & x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\
 & x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{vlevo} \text{ obecné řešení} \\
 \text{lineární rovnice o jedné} \\
 \text{neznámé; } \text{vpravo} \text{ obecné} \\
 \text{řešení soustavy dvou} \\
 \text{lineárních rovnic. Obě} \\
 \text{řešení jsou pro kanonický}
 \end{array}$$

tvar. Obecné řešení soustavy dvou lineárních rovnic je odvozeno v Příloze 17.

Obecná řešení
exponenciálních
rovnice

Niels Abel

Kvadratická rovnice

Kořeny kvadratické
rovnice

U polynomů existuje obecné řešení pro rovnice alespoň do $n=4$ (důkaz provedl norský matematik Niels Abel (1802-1829) [Mareš, 2006, s. 85]), tato řešení jsou uvedena v každém přehledu matematických vzorců, například v [Rektorys et al., 2003, s. 38]. Na Obrázku 33 je uvedeno obecné řešení pro rovnici kvadratickou, která se v technické praxi vyskytuje velmi často. Jak je patrné kvadratické rovnice mohou mít dvě řešení (tzv. kořeny), přičemž obvykle je jeden záporný a jeden kladný, ale technik hledá pouze jedno, a tak v takových případech vybírá to, které lépe vyhovuje očekávání (obvykle je to ten kladný kořen) a takový výsledek dává smysl.

$$33: \quad x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2a_0}; \quad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2a_0}; \quad D = a_1^2 - 4a_0a_2$$

Obecné řešení kvadratické rovnice: D tzv. diskriminant. Pokud bude diskriminant menší než nula $D < 0$, pak má kvadratická rovnice komplexní kořeny (výsledkem je komplexní číslo).

Numerická řešení rovnic

K numerickému řešení rovnice se přistupuje například tehdy je-li úprava rovnice příliš duševně náročná nebo nemožná a u větší soustavy rovnic, u kterých se z praktických důvodů na hledání obecného řešení rezignuje. Numerické řešení je jedinou cestou u rovnic 5 stupně a obecně rovnice, u kterých nelze separovat neznámou, respektive nejsme schopni odvodit obecné řešení v přímém tvaru, viz [Rovnice 34](#).

Iterační výpočet

Rovnic 34 je zvláštní v tom, že nelze získat algebraickými úpravami její obecné řešení a jediná možnost nalezení řešení je iterační postup. Na počátku iteračního výpočtu obvykle odhadneme (na základě dostupných dat) interval na ose čísel, ve kterém by se mohl nalézat očekávaná hodnota hledané neznámé a postupně testujeme možná řešení – při iteračních postupech často nejsme schopni dosáhnout zcela přesného výsledku, ale výsledku s určitou přesností. Iterační metod je velké množství, ale téměř vždy jsou založeny na derivacích funkcí (viz [Rektorys et al., 2003, s. 603]), takže si řekněme něco jen o základní iterační metodě Monte Carlo založené na odhadu.

- 34: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{C}{3,72} \right)$ Parametry Re , C jsou konstantami. λ veličina, kterou máme vypočítat. V tomto případě se jedná o tzv. Colebrookovu rovnici pro výpočet součinitele tření v potrubí, více v článku *Vznik tlakové ztráty při proudění tekutiny a její výpočet* [Škorpík, 2023].

Metoda Monte Carlo

Při metodě Monte Carlo náhodně testujeme různá řešení. Obecně se za řešení považuje množina čísel, interval na ose čísel nebo konkrétní číslo, o kterém se předpokládá, že leží blízko řešení. Konkrétně v případě [Rovnice 34](#) by mohl probíhat tak, že bychom nejprve převedli výraz na pravé straně na levou (rovnice se pak bude rovnat nule), při následném testování výsledků pro různá řešení (námi vybraný interval čísel, o kterém si myslíme, že by mohl obsahovat řešení) pro λ bychom sledovali, jestli se levá strana blíží nule (pak zužujeme interval správným směrem – zvyšujeme přesnost výsledku) a nebo vzdalujeme od nuly (pak interval možných řešení rozšiřujeme), viz [Úloha 3](#). Je zřejmé, že metoda Monte Carlo je nejvíce náročná na počet výpočtových kroků, ale s nástupem počítačů se jedná o velmi používanou metodu a využívá se dost často pro hledání řešení i mnohem méně náročných rovnic např. $3 \cdot x + 1 = 7$, protože rychlost stolních počítačů je vysoká a šetří tak duševní úsilí výpočtáře a navíc metodu výpočtu obsahují i kancelářské tabulkové procesory.

- Úloha 3: Řešte [Rovnici 34](#) metodou Monte Carlo, pro parametry $Re = 4 \cdot 10^5$, $C = 6,6667 \cdot 10^{-3}$. Řešení úlohy je uvedeno v [Příloze 3](#).

Iterační výpočet

Postup řešení Úlohy 3

1. zadání: $Re; C$	4. výpočet: hodnot levé strany rovnice z ř. 2 pro vybrané hodnoty λ z intervalu definovaného v ř. 3
2. úprava: úprava rovnice, tak aby na levé straně rovnice byla 0	5. porovnání: výběr výsledku z ř. 4, který je nejbližší hodnotě 0
3. odhad: intervalu, ve kterém očekáváme správnou hodnotu neznámé λ	

Numerické řešení
soustavy lineárních
rovníc

Asi si dokážeme představit, že existují rozsáhlejší soustavy rovnic s více neznámými, než je soustava rovnic na Obrázku 31 (například především při řešení schémat v elektrotechnice i schémat rozsáhlých potrubních tras technologických celků, viz například článek Parní turbína v technologickém celku). Takové soustavy řešíme numericky pomocí maticového počtu. Metod na maticové řešení soustavy lineárních rovnic je více [Dobrovolný and Žďárek, 1954, s. 61], [Rektorys et al., 2003, s. 32], [Schmidtmayer, 1967, s. 196], ale asi nejoblíbenější je tzv. Gaussova eliminační metoda a navíc se na ní dobře demonstruje funkce maticového zápisu rovnic.

Gaussova eliminační
metoda
Schodovitý tvar

Princip GEM spočívá v tom, že z původní soustavy rovnic vytvoříme prakticky nové rovnice se stejnými výsledky (v rozsahu zaokrouhlování), přičemž výsledná soustava rovnic bude mít v normalizovaném tvaru zleva postupně na každém řádku o jeden nulový parametr navíc, jak ukazuje Rovnice 35. Takže na posledním řádku soustavy je výsledek poslední neznámé, tu následně dosadíme do předposlední rovnice a získáme hodnotu předposlední neznámé atd. O výsledné matici, která obsahuje nenulové parametry pouze na diagonále říkáme, že má schodovitý tvar zleva i zprava.

35: $x_1 + 0 + 0 + \dots + 0 = b_1$
 $0 + x_2 + 0 + \dots + 0 = b_2$
 $0 + 0 + x_3 + \dots + 0 = b_3$
 \vdots
 $0 + 0 + 0 + \dots + x_n = b_n$

Tato soustava má stejné řešení jako původní soustava Rovnic 30 (hodnoty parametrů b mohou být samozřejmě jiné než v původní soustavě).

Algebraické úpravy

Nové rovnice z původní soustavy tvoříme odečítáním rovnic od sebe, pokud před touto operací odečítanou rovnicí vynásobíme takovým číslem, aby výsledná rovnice obsahovala alespoň o neznámou méně na té správné pozici (eliminovaly jsme jednu neznámou), pak se nám postupně podaří dalšími takovými operacemi získat cílový tvar soustavy, viz příklad na Obrázku 36.

Rovnice lze za účelem rychlejšího výpočtu prohazovat z jednoho řádku na jiný a to lze provádět i se sloupci, ale v takovém případě musíme myslet na to, že pořadí neznámé už nebude odpovídat číslu sloupce (proto dáváme přednost prohození řádků, pokud to jde). Samozřejmě při operacích nelze násobit nulou, proto při výběru dvojice rovnic, které budeme od sebe odečítat, musíme vybrat rovnice takové, abychom nemuseli násobit nulou.

$$\begin{array}{cccc}
 36: & x_1+2x_2=5 & x_1+2x_2=5 & -\frac{1}{3}x_1+0=-\frac{1}{3} & x_1+0=1 \\
 & \Rightarrow & \Rightarrow & \Rightarrow & \\
 & 3x_1+4x_2=11 & 0+\frac{2}{3}x_2=\frac{4}{3} & 0+\frac{2}{3}x_2=\frac{4}{3} & 0+x_2=2 \\
 & (a) & (b) & (c) & (d)
 \end{array}$$

Soustavu (b) získáme tak, že poslední rovnici vynásobíme podílem $a_{11} \cdot a^{-1}_{21}$, tedy zlomkem $1/3$, abychom získali stejnou hodnotu parametru před neznámou x_1 jako v předchozí rovnici. Následně druhou rovnici nahradíme rovnicí, která vyjde odečtením druhé rovnice od první. Soustavu (c) získáme tak, že první rovnici vynásobíme podílem $a_{22} \cdot a^{-1}_{12}$, tedy zlomkem $2/(3 \cdot 2)$, abychom získaly stejnou hodnotu parametru před neznámou x_2 jako v následující rovnici. Následně první rovnici nahradíme rovnicí, která vyjde odečtením první rovnice od druhé. Výslednou soustavu (d) získáme tak, že první rovnici vynásobíme převrácenou hodnotou parametru a_{11} , tedy číslem -3 a druhou rovnici vynásobíme převrácenou hodnotou parametru a_{22} , tedy zlomkem $3/2$.

Homogenní tvar rovnice
 Nehomogenní tvar rovnice
 Podmínky řešení

Všimněte si, že cílový tvar obsahuje pouze nehomogenní rovnice (lineární rovnice, která má na pravé straně nenulové číslo $b \neq 0$), proto je tato eliminační metoda neúčinná, pokud původní soustava rovnic obsahuje pouze homogenní rovnice $b=0$ – násobením ani odčítáním od sebe se tyto nuly nezmění. Naštěstí stačí, aby alespoň jedna rovnice v původní soustavě byla nehomogenní, pak už stačí vytvořit novou soustavu tak, že ke každé homogenní rovnici přičteme/odečteme onu nehomogenní rovnici.

Matice

U velkých soustav rovnic se při neustálém opisování rovnic vynechává znaménko plus, rovná se i označení jednotlivých neznámých x a celá soustava se zapisuje pomocí tzv. maticového zápisu do matice, viz Obrázek 37. Na Obrázku 38 je konkrétní příklad matice a to matice soustavy lineárních Rovnic 31 i s výslednou maticí, která je jejím řešením. U vstupní matice soustavy Rovnic 38 si také všimněte kolik nul obsahuje.

$$37: \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} & & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} & & b_3 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} & & b_n \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{array} \right) X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Příklady maticového zápisu soustavy lineárních rovnic

To je typický charakter matic z praxe (na rozdíl od příkladů z matematiky, kde je většina parametrů nenulová), a proto jejich výpočet lze velmi urychlit vhodným přeskládáním pořadí matic a pořadí neznámých.

38:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 49 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} x_1 \quad x_4 \quad x_3 \quad x_2 \quad x_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 434 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 49 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 336 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \end{array} \right) \end{array}$$

Všimněte si, že během řešení matice byly přehozeny sloupce neznámých x_2, x_4 , protože toto přehození vedlo k rychlejšímu výpočtu (méně potřebných operací). Celý postup je uveden v Příloze 18.

Programovací jazyk

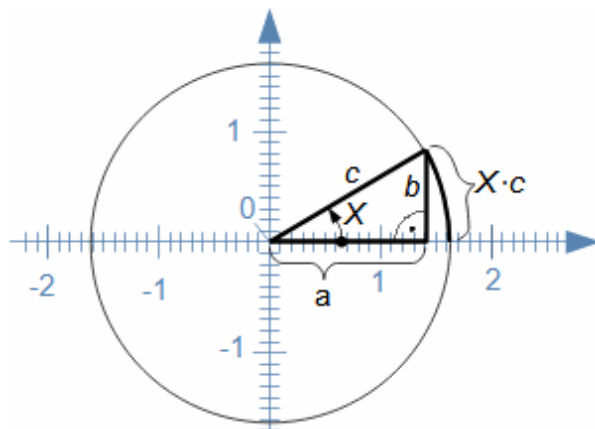
GEM je vhodná pro matematické stroje, jako jsou programovatelné kalkulačky nebo počítače, protože operace potřebné k dosažení výsledku jsou předvídatelné a lze tedy lehce sestavit postup řešení zapsatelný v programovacím jazyce.

Stupně, nebo radiány?

Oblouková míra
Oblouk
Přepona
Průvodič

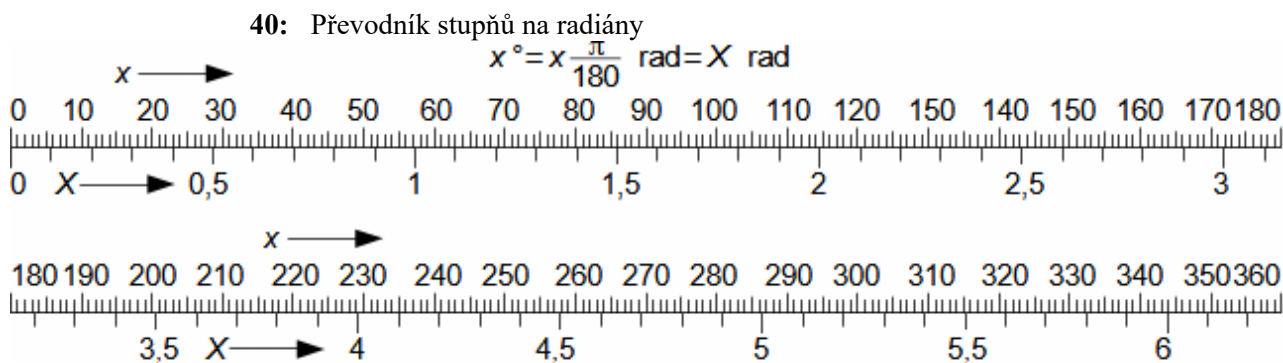
V technické praxi se velmi často místo jednotky pro velikost úhlu stupeň [°] používá jednotky radián [rad], tzv. oblouková míra. Použití obou jednotek má své opodstatnění. Zatímco v případě stupňů používáme 360 dílnou stupnici tak u radiánů stupnici o velikosti 2π . To má výhodu především pro případy, kdy se s úhly dále pracuje navazujících výpočtech (i v jiných než v trigonometrických), protože součin úhlu v radiánech a délky přepony c je délkou oblouku vytvořené přeponou (přepona se v takovém případě nazývá průvodič), viz Obrázek 39. Takže při pootočení průvodiče o celou otáčku bude délka oblouku rovna obvodu kruhu $2\pi \cdot c$, proto plný úhel v radiánech je roven právě $2\pi=360^\circ$. Podobně oblouk vytvořený pootočením průvodičem

39:



Úhel v radiánech násobený délkou průvodiče c je roven velikosti oblouku kružnice o poloměru c .

o čtvrt otáčky musí být velký jako čtvrt kruhu $2\pi \cdot c/4$, takže $\pi/2=90^\circ$ apod. Převod stupňů na radiány je potom jednoduchý $X/(2\pi)=x/360$, kde velké X je úhel v rad a x ve stupních, viz. také Převodník 40.



Technická
dokumentace
Kótování úhlů

A proč tedy používáme i stupně? Pro výpočet oblouku pomocí zadaného úhlu ve stupních je sice nutné tyto úhly převést na radiány, ale jednotky stupně mají výhodu ve velmi jemné stupnici a důležité úhly jako pravý úhel 90° , ostrý úhel 45° , přímý úhel 180° a další frekventované úhly 30° a 60° jsou celá čísla. Proto se s dekadickou stupnicí úhlů pracuje mnohem snáz při konkrétních geometrických představách a používají se pro kótování úhlů ve výrobní dokumentaci nějaké součástky, v plánech domů a jiných technických dokumentacích. Radiány ale mají výhodu při širších výpočtech, kdy trigonometrický výpočet je součástí rozsáhlejšího výpočtu a úhly jsou vstupem i do jiných výpočtů (velikosti oblouku, úhlové rychlosti apod.).

Využití totálního diferenciálu neboli přírůstku funkce při popisu nějakého fyzikálního děje

Vyšší matematika
Diferenciální počet
Integrální počet

Předpokládám, že čtenáři se už setkali s diferenciálním počtem, pokud ne, doporučuji knihu Co je a k čemu je vyšší matematika [Rektorys, 2001]. Na středoškolské úrovni se většinou student dozví, mimo pravidel pro derivování a integrování, jak pomocí diferenciálního a integrálního počtu určí délky křivek, velikost ploch a objemy různých objektů. Většinou také něco o určení tzv. extrémů funkce. To jsou věci, o kterých zde psát nebudu (viz obsah knihy výše), navíc drtivá většina řešení jako délky frekventovaných křivek, ploch a objemů objektů v technice je široce dostupná na internetu i v tabulkách. V této kapitole se chci tedy zaměřit na popis podstaty totálního diferenciálu neboli přírůstku funkce při sestavování tzv. diferenciálních rovnic popisující nějaký vyšetřovaný děj a začnu pojmem parciální derivace.

Parciální derivace
 Derivace funkce j-
 proměnných
 Gradient funkce
 Přírůstek funkce
 (Totální diferenciál)
 ∂ značka pro parciální
 derivaci

V technice a fyzice se často vyskytují veličiny, které jsou funkcí více nezávislých proměnných a právě takových funkcí se týká parciální neboli částečná derivace. Například pro $u=f(x, y)$ je veličina u funkcí dvou veličin x a y . Takový typ rovnice je možné derivovat podle proměnné x i y , přičemž, když se derivuje podle jedné proměnné, tak druhá je považována za konstantu [Rektorys et al., 2003, s. 395], jinými slovy jsme z funkce $f(x, y)$ vytvořili nejprve dvě funkce $u_y=f(x, y=\text{konst.})$, $u_x=f(x=\text{konst.}, y)$. Výsledkem parciální derivace takové funkce je soustava dvou rovnic, viz Rovnice 41). Taková soustava rovnic se využívá například při hledání gradientu skalárního pole nebo přírůstku funkce známé jako totální diferenciál – oba tyto matematické pojmy mají své vlastní kapitoly uvedené v další části článku. Obecně platí, jestliže funkce obsahuje j počet nezávisle proměnných, potom výsledkem parciální derivace takové funkce bude soustava s j rovnicemi.

- 41: (a) $\frac{du_y}{dx}$ $\frac{du_x}{dy}$ (a) označení parciální derivace pomocí písmene d (dolní index označuje, která proměnná je při derivaci konstantní) jako značky pro diferenciál [Dobrovolný and Žďárek, 1954, s. 189]; (b) pro přehlednost se upouští od indexů a pro označení parciální derivace se používá místo písmene d znak ∂ (partial).
- (b) $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}$

Pravidla derivování

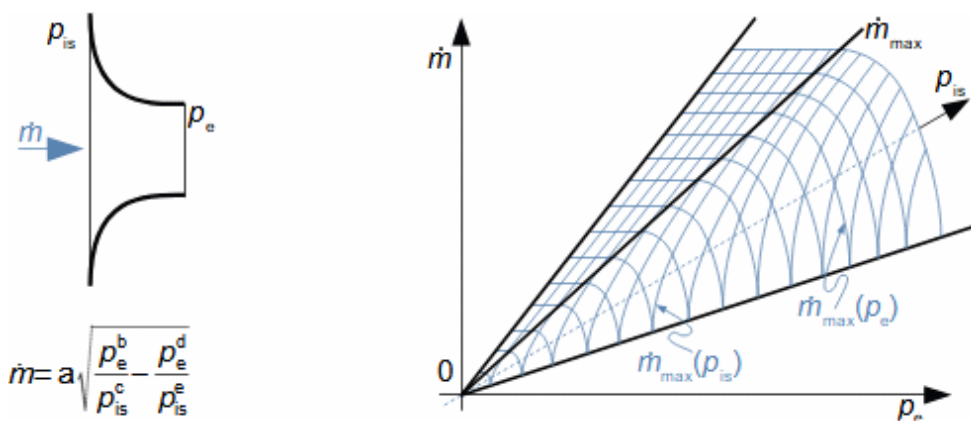
Pro parciální derivace přirozeně platí stejná pravidla derivování jako pro funkce jedné proměnné, a parciální derivace má i stejnou interpretaci (jedná se o směrnici tečny k průběhu funkce ve směru osy proměnné podle, které se derivuje). To znamená, že uvedené dvě parciální derivace v určitém bodě soustavy souřadnic u - x - y představují dvě tečny k této ploše vytvořenou původní funkcí $f(x, y)$ dvou proměnných.

Hmotnostní tok tryskou
 Průtokový kužel trysky

Vlastnosti a postup při parciální derivaci lze dobře předvést na příkladu jednoho z nejznámějších vztahů v termodynamice, což je rovnice pro hmotnostního tok ideálního plynu tryskou při podzvukových rychlostech, viz Úloha 4. Tato rovnice obsahuje dvě proměnné a to tlak před tryskou a za tryskou, proto výsledkem parciální derivace budou dvě rovnice. Jedna rovnice bude udávat jak se bude měnit průtok tryskou, když se bude měnit tlak před tryskou a druhá jak se bude měnit průtok, když se bude měnit tlak za tryskou. Výsledkem je prostorová plocha označovaná jako průtokový kužel trysky.

Aplikace parciální
 derivace

- Úloha 4:** Proved'te parciální derivaci rovnice pro hmotnostní tok ideálního plynu tryskou podzvukovou rychlostí. Rovnice je uvedena například v článku Proudění plynů a par tryskami [Škorpík, 2023c]. Předpokládejte konstantní celkovou teplotu plynu před tryskou. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 4.



\dot{m} [kg·s⁻¹] hmotnostní tok plynu tryskou; p_e [Pa] tlak na výtoku z trysky (exit); p_{is} [Pa] celkový tlak na vstupu do trysky (input); a, b, c, d, e konstanty; \dot{m}_{max} [kg·s⁻¹] maximální tok plynu tryskou, při kterém přestává reagovat na další snižování protitlaku p_e .

Válcová soustava souřadnic

Parciální derivace v jiné soustavě souřadnic už může být trochu složitější, protože diferenciály musíme transformovat. Například pro válcovou soustavu souřadnic se parciální derivace provádí podle proměnných r (poloha na průvodiči), u (délka oblouku od jeho počátku) a a (poloha na ose od jejího počátku) a protože diferenciál v obvodovém směru lze vyjádřit jako součin délky průvodiče a diferenciálu úhlu θ tj. $du=r \cdot d\theta$ je ve jmenovateli derivace podle úhlu θ součin $r \cdot d\theta$, viz Vzorec 42.

42:
$$\frac{\partial k}{\partial r} \quad \frac{\partial k}{\partial u} = \frac{1}{r} \frac{\partial k}{\partial \theta} \quad \frac{\partial k}{\partial a}$$
 Vzorce ukazují parciální derivace veličiny k , kterou lze vypočítat pomocí funkce $k=f(r, u, a)$ ve válcové soustavě souřadnic.

Totální diferenciál aneb přírůstek funkce

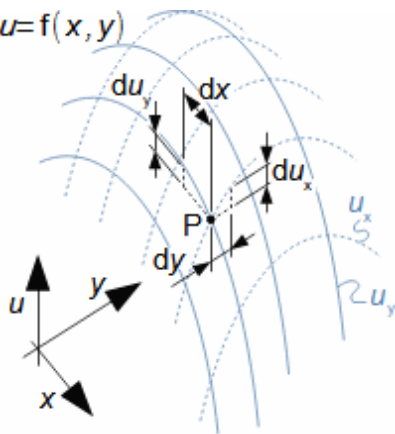
Klasická úloha v technice je určení infinitezimální změny sledované veličiny, která je funkcí více proměnných, když dojde ke změnám těchto proměnných. Tuto změnu označujeme jako totální diferenciál neboli přírůstek funkce, což je součet změn (diferenciálů) od jednotlivých proměnných. Například kdybychom chtěli vědět o jakou diferenci se změní průtok tryskou z Úlohy 4 (tedy chceme znát totální diferenciál dm), jestliže se změní oba tlaky před i za tryskou o diferenciály dp_{is} , respektive o dp_e , pak bychom museli nejprve stanovit diferenciál hmotnostního toku od změny tlaku p_{is} a tlaku p_e , tedy diferenciál $dm_{p_{is}}$, respektive dm_{p_e} . Totální diferenciál dm je pak součtem těchto změn. Právě tento výsledný diferenciál se nazývá totálním diferencíálem nebo také přírůstek funkce dvou a více proměnných.

Obecná rovnice totálního diferenciálu
Parciální přírůstek

Obecně lze říci, že totální diferenciál veličiny u , která je dána funkcí $f(x, y)$ dvou proměnných x, y ($u=f(x, y)$) bude du . Totální diferenciál du představuje přírůstek funkce ve vyšetřovaném bodě (ve kterém jsou známy parciální derivace)

třírozměrné soustavě souřadnic $u-x-y$, jestliže se změní velikost proměnných o diferenciály dx, dy , což je graficky znázorněno na Obrázku 43. Rovnici pro totální diferenciál lze dále upravit na tvar $du = du_y/dy \cdot dy + du_x/dx \cdot dx = \partial u/\partial x \cdot dx + \partial u/\partial y \cdot dy$. Takový součet platí i pro funkce s více jak dvěma proměnnými [Rektorys et al., 2003, s. 396], viz obecná Rovnice 44 pro totální diferenciál.

43: $u = f(x, y)$



Grafické znázornění totálního diferenciálu: V tomto případě se jedná o funkci $u=f(x, y)$ jejíž přírůstek ve směru x je klesající $du_y < 0$ a ve směru y rostoucí $du_x > 0$. Totální diferenciál neboli přírůstek funkce v okolí vyšetřovaného bodu P je tedy součtem přírůstků v jednotlivých směrech (parciálních přírůstků) $du = du_y + du_x$.

44: $u = f(n_1, n_2, n_3 \dots n_j);$

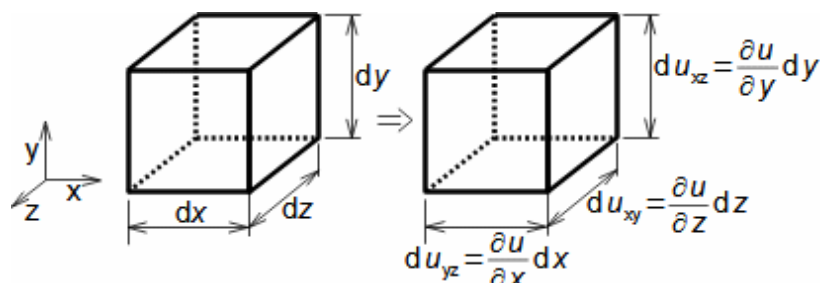
$$du = \frac{\partial u}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial u}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial u}{\partial n_3} dn_3 + \dots + \frac{\partial u}{\partial n_j} dn_j$$

Totální diferenciál funkce j -proměnných, kde j je počet proměnných a n označuje proměnnou.

Mechanika kontinua
Elementární krychle

A nyní k praktickým příkladům užití totálního diferenciálu. V Úlohách 5 a 6 naleznete příklady odvození rovnic pro totální diferenciál hmotnostního toku, ale zde využití totálního diferenciálu ještě nekončí. Pravidla pro totální diferenciál lze totiž využít při sestavování diferenciálních rovnic a v mechanice kontinua se aplikuje na tzv. elementární krychli, viz Obrázek 45. Teorie elementární krychle se využívá k popisu rovnováhy a změn vyšetřovaných veličin, například sil, energie, tlaku, teploty atd. Na Obrázku 45 je takto stanoven přírůstek nějaké obecné fyzikální veličiny u , který stačí nahradit symbolem pro vyšetřovanou veličinu, například tlakem, teplotou, silou atd.

45:



Přírůstek veličiny u v jednotlivých směrech vepsaný do elementární krychle.

Úloha 5: Určete totální diferenciál průtoku plynu tryskou. Využijte poznatků z Úlohy 4. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 5.

$$d\dot{m} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial p_{is}} dp_{is} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial p_e} dp_e$$

První krok při řešení Úlohy 5

Úloha 6: Určete totální diferenciál rovnice kontinuity proudění tekutiny v kanále. Rovnice má tvar $A \cdot \rho \cdot V = m$, kde A [m²] je průtočný průřez kanálu, ρ [kg·m⁻³] je hustota, V [m·s⁻¹] rychlost tekutiny, m [kg·s⁻¹] je hmotnostní průtok, který je konstantní po celé vyšetřované délce kanálu. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 6.

$$dm = \frac{\partial m}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial m}{\partial A} dA + \frac{\partial m}{\partial V} dV = 0 \quad \text{První krok při řešení Úlohy 6}$$

Užití gradientů při popisu změn sledované veličiny v prostoru

Gradient

Vektor

Gradient teploty

Gradient je vektor v klasickém prostoru a udává změny a jejich směr vyšetřované veličiny ve vyšetřovaném objemu, který označíme jako oblast Ω . Takže například souřadnice gradientu teploty vody v určitém bodu v rybníce by se pro směr x stanovil jako podíl změny teploty v tomto směru Δt_x a vzdálenosti Δx ve směru x , na kterém se tato změna projeví, což se zapíše takto: $\Delta t_x / \Delta x$, kde t [°C] je teploty. Pro směry y a z podobně. Výsledkem jsou tedy tři souřadnice tohoto gradientu, respektive vektoru \vec{a} , které se zapíší tak jako je to na Obrázku 46 vlevo. V tomto případě nám vektor říká o kolik stupňů Celsia se zvýší teplota vody při pohybu daným směrem o vzdálenost 1 m. Aby bylo zřejmé, že tento vektor je gradientem nějaké vyšetřované veličiny, tak se označuje zkratkou $\text{grad } t$, tak jak je uvedeno na Obrázku 52 vpravo.

46: $\vec{a} = \left(\frac{\Delta t_x}{\Delta x}, \frac{\Delta t_y}{\Delta y}, \frac{\Delta t_z}{\Delta z} \right); \quad \vec{a} = \text{grad } t$ Příklad zápisu gradientu teploty v objemu rybníku: t [°C] teplota vody; \vec{a} vektor.

Oblast Ω

Skalární pole

Vektorové pole

Hladina skalárního pole

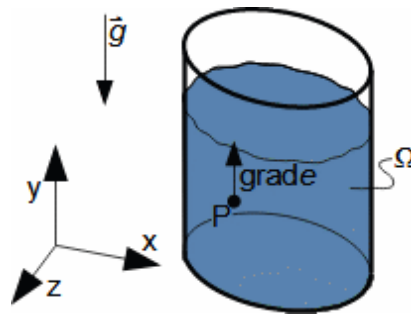
Prostor, ve kterém stanovujeme gradienty vyšetřované veličiny označujeme jako oblast Ω . Celou oblast Ω můžeme označit jako skalární pole, pokud budeme mluvit o hodnotách teploty v jednotlivých bodech této oblasti, nebo vektorové pole, pokud budeme hovořit o jejich gradientech. Plochy v oblasti Ω , na kterých je vyšetřovaná skalární veličina konstantní se označují jako hladiny skalárního pole.

Směr gradientu

Gradient potenciální energie

Směr gradientu lze v některých případech určit triviálním způsobem. Například směr gradientu potenciální energie vody v nějaké nádobě bude proti směru gravitačního zrychlení (ve směru kolmém na hladinu bude ode dna potenciální energie vody růst), protože potenciální energie je definována vzorcem $e = -g \cdot y$, viz Obrázek 47. Hladiny skalárního pole budou kolmé na tento směr (jsou rovnoběžné z hladinou vody v této nádobě). Vektory ve vektorovém poli tvořené gradienty budou směřovat ke dnu nádoby. Směr gradientu tepelného toku bude směřovat od teplého ke studenému konci oblasti Ω .

47:

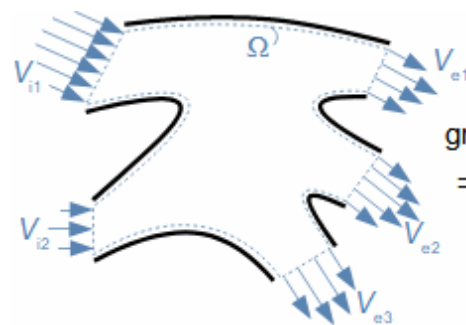


e [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$] potenciální energie 1 kg vody; $\text{grad } e$ [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$] gradient potenciální energie (směr růstu potenciální energie ve vyšetřovaném bodě a jeho velikost v závislosti na souřadnici) v bodě P; g^{\rightarrow} [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$] gravitační zrychlení $g^{\rightarrow}(0;-9,81;0)$. Vyšetřovaná oblast Ω je celý objem vody v nádobě.

Rovnice zachování
Gradient energie
Hydrodynamika

Pro praxi je definice gradientů užitečná také při zápisu rovnic zachování at' už hmoty nebo energie. Na Obrázku 48 příklad rovnice zachování energie tekutiny ve vyšetřovaném objemu Ω . Podle prvního zákona termodynamika může tekutina obsahovat již zmíněnou potenciální energii e , ale i kinetickou $V^2/2$, tlakovou p/ρ a vnitřní tepelnou energii u , které se mohou mezi sebou transformovat. Jestliže na vstupu (označení i) do tohoto vyšetřovaného objemu je všude energetický obsah tekutiny stejný, pak musí v objemu Ω platit, že klesá-li v nějakém směru gradient jednoho druhu energie, tak v tom samém bodě a směru musí gradient jiné energie růst apod. Jinými slovy součet gradientů těchto energií musí být roven nule. Pokud roven nule není, pak to jednoduše znamená, že tato tekutina sdílí energii se svým okolím, což je možné, buď ve formě práce w , nebo tepla q . Toto tvrzení lze tedy zapsat Rovnicí 48. Pomocí takové rovnice lze následně vyšetřit proudění po libovolné proudnici mezi vstupem a výstupem, respektive určit jak se mění tlaky, určit vykonanou práci atd., viz také Úloha 8. Tato rovnice je naprosto klíčová rovnice pro studium mechaniky kontinua a v různých obměnách ji obsahují téměř všechny energetické rovnice známe v hydromechanice i Navier-Stokesova rovnice.

48:



$$\text{grad } u + \text{grad } \left(\frac{p}{\rho} \right) + \text{grad } \left(\frac{V^2}{2} \right) + \text{grad } e = -\text{grad } w + \text{grad } q$$

Ω -vyšetřovaný objem. e [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$] měrná potenciální (energie 1 kg tekutiny); p [Pa] tlak; q [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$] měrné teplo sdílené s okolím (může se jednat o teplo přiváděné/odváděné do/z pracovní tekutiny přes hranici vyšetřovaného objemu nebo i o teplo vzniklé/spotřebované chemickou reakcí uvnitř vyšetřovaného objemu); u [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$] měrná vnitřní tepelná energie; V [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost tekutiny ve vyšetřovaném bodě V_i [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlosti proudění na vstupech do vyšetřovaného objemu; V_e [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlosti proudění na výstupech z vyšetřovaného objemu; w [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$] měrná vnitřní práce tekutiny; ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$] hustota tekutiny.

Gradient tlaku v potrubí

Zápis pomocí gradientů je velmi přehledný pro nalezení různých kontextů i při řešení složitých problémů. Například aplikací poslední Rovnice 48 na proudění kapaliny vodorovným potrubím konstantního průřezu, ve kterém tekutina nekoná práci ani nesdílí teplo s okolím, zjistíme, že klesá-li tlak v důsledku vnitřního tření (tlaková ztráta), tak musí růst hodnota vnitřní tepelné energie kapaliny apod.

Gradient potenciální funkce
Potenciální vektorové pole

Jestliže v celém vyšetřovaném objemu Ω je vyšetřovaná veličina u dopočitatelná podle nějaké funkce $u=f(x, y, z)$ a tato funkce je v celé oblasti spojitá (tzn. v každém bodě oblasti Ω má veličina u danou hodnotu – skalár, číslo), pak lze gradient této veličiny spočítat pomocí Rovnice 49. Přesněji přírůstky sledované veličiny v jednotlivých směrech jsou rovny parciální derivacím v těchto směrech. Přičemž funkci u nazýváme potenciální, protože je funkcí pouze polohy, proto také vektorové pole, které je vytvořeno z gradientů potenciálních funkcí označujeme jako potenciální vektorové pole.

$$49: \quad \text{grad } u = \vec{a} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Nepotenciální vektorové pole
Proudění s vnitřním třením

Jestliže je oblast Ω vyplněná vektorovým polem, které je gradientem nějaké veličiny, kterou nelze popsat potenciální funkcí, pak o tom poli říkáme, že je nepotenciální. Typické nepotenciální vektorové pole je vektorové pole rychlostí tekutiny s vnitřním třením, viz článek Vnitřní tření tekutiny a vývoj mezní vrstvy [Škorpík, 2023a]. Pokud neexistuje pro vyšetřovanou veličinu spojitá potenciální funkce $u=f(x, y, z)$, pak lze hodnoty gradientů řešit pomocí statistiky, podobnosti (včetně počítačového modelu), měřením apod.

Gradient potenciální energie

Vraťme se nyní ke gradientu potenciální energie ve sklenici vody z Obrázku 47. V tomto případě jsme schopni sestavit funkci pro výpočet potenciální energie v celém objemu vody a to vzorcem: $e=-g \cdot y$ pro $\vec{g}=(0;-9,81;0)$, takže dosazením této funkce do Rovnice 49 získáme gradient potenciální energie ve sklenici vody ve tvaru: $\text{grad } e=\vec{a}=(0;9,81;0)$. Obecně lze pro gradient potenciální energie (při konstantní hodnotě gravitačního zrychlení) odvodit Vzorec 1234.

Vlastnosti gradientů a práce s nimi ve vektorové analýze

Gradient potenciální funkce
Operátor ∇

Pro potřeby vektorové analýzy, respektive práce s gradientem v rámci širšího výpočtu, se gradient potenciální funkce zapisuje ve formě parciální diferenciální Rovnice 50 (parametry $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ označují, že se současně jedná o souřadnice

vektoru). Pro, tímto způsobem zapsaným gradientem, platí pravidla vektorové algebry, například [Rektorys et al. 2003, s. 219], [Garaj, 1957].

50:
$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla \cdot u; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

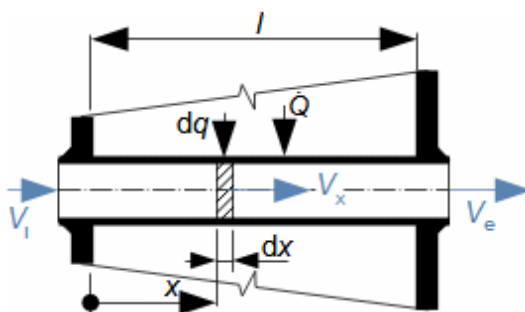
∇ operátor nabla.

Potenciální proudění
Gradient kinetické energie
Zrychlení

Jedním z příkladů využití parciální diferenciální rovnice pro popis gradientu potenciální funkce v oblasti Ω je potenciální proudění. Potenciálním prouděním se označuje idealizované proudění jehož vektor rychlosti vytváří potenciální vektorové pole. Model potenciálního proudění se uplatňuje v hydrodynamice při popisu proudění ideálních tekutin, pro které má velmi dobré výsledky. Na základě Rovnice 50 lze jednoduše dokázat, že zrychlení v potenciálním proudění je dáno gradientem kinetické energie, viz důkaz v Úloze 7 a další Úlohy 8, 9 na výpočet stavových veličin proudu.

Úloha 7: Dokažte, že zrychlení tekutiny je gradientem kinetické energie tekutiny. Uvažujte potenciální proudění. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 7.

Úloha 8: Určete zrychlení proudu ideálního plynu v potrubí tepelného výměníku. Uvažujte stacionární proudění a vysokou tepelnou vodivost pracovního plynu. Neuvažujte vliv vnějšího zrychlení. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 8.



l [m] délka potrubí; $V_{i,e}$ [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost na vstupu a výstupu z potrubí; Q [W] celkový tepelný výkon předávaný do plynu na úseku potrubí o délce l ; q [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$] získané teplo 1 kg plynu, které získá na délce l ; x [m] vzdálenost vyšetřovaného bodu od začátku potrubí.

Úloha 9: Určete gradient tlaku proudu ideálního plynu v potrubí tepelného výměníku, jestliže znáte funkci pro zrychlení. Použijte výsledky z Úlohy 8. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 9.

Gradient tlaku v potrubí
Přírůstek potenciální funkce
Jednotkový vektor směru

V případě gradientu potenciální veličiny jsou tedy jeho jednotlivé souřadnice parciálními derivacemi této funkce. Při porovnání s Rovnicí 44 pro přírůstek funkce je evidentní, že pro stanovení přírůstku funkce funkce pro u stačí znát gradienty této veličiny a ty vynásobit diferenciály vzdáleností v jednotlivých směrech (pro složku ve směru x diferenciálem dx atd.). Obecně se taková operace zapíše Rovnicí 51.

51: $du = (\nabla \cdot u) \cdot d\vec{s}$ $d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ Diferenciál $ds^{\vec{}}$ se nazývá jednotkovým vektorem směru.

Diference potenciální funkce

Hladina skalárního pole

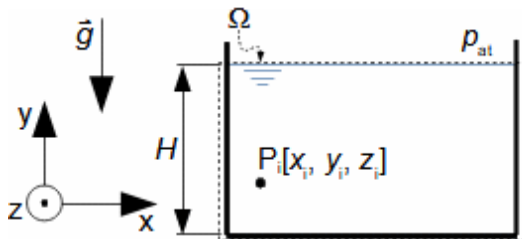
Známe-li přírůstek funkce vyšetřované potenciální veličiny u , pak není problém v oblasti Ω vypočítat změnu této veličiny mezi jakýmkoliv dvěma body i a e prostou integrací, podle Rovnice 52. Protože u je definována potenciální funkcí, pak hodnoty u_i, u_e jsou zároveň hodnotami na daných hladinách.

52: $u_{i-e} = \int_i^e du = \int_i^e (\nabla \cdot u) d\vec{s} = u_i - u_e$

Úloha 10: Gradient potenciální veličiny

Hladina skalárního pole

Určete gradient tlaku kapaliny v nádobě, zakreslete hladinu tlaku procházející bodem $P_i[x_i, y_i, z_i]$ a sestavte rovnici pro přírůstek tlaku v této nádobě. Zakreslete v libovolném místě oblasti Ω nový bod P_e a stanovte rozdíl tlaků mezi hladinami procházející tímto bodem a bodem P_i . Uvažujte, že na kapalinu působí pouze tíhové zrychlení (homogenní tíhové pole), viz přiložený obrázek. Postup řešení úlohy je uveden v Příloze 10.



$grad \ p = \vec{a}(0; -9,81 \rho; 0)$
 $dp = -9,81 \cdot \rho \cdot dy$

Obrázek k Úloze 10: $g^{\vec{}}$ [$m \cdot s^{-2}$] gravitační zrychlení $g^{\vec{}}(0; -9,81; 0)$; p [Pa] tlak; p_{at} [Pa] tlak nad hladinou nádoby (atmosférický tlak); H [m] výška hladiny vody v nádobě; x, y, z [m] souřadnice; ρ [$kg \cdot m^{-3}$] hustota vody.

Cirkulace vektoru

Potenciální vektorové pole

Cirkulace vektoru je ve vektorové analýze myšlena integrace součinu vektoru a jednotkového vektoru směru po uzavřené křivce, viz Rovnice 53. Jestliže je vektor $a^{\vec{}}$ současně gradientem potenciální funkce, pak to znamená, že tato cirkulace musí být rovna nule, protože počáteční hladina integrace je stejná jako konečná, viz Integrál 52.

53: $\Gamma = \oint_K \vec{a} \cdot d\vec{s}$ Γ cirkulace vektoru.

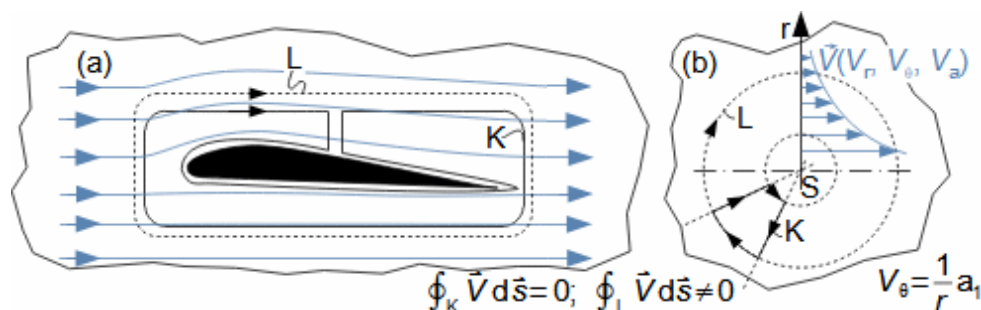
Potenciální proudění

Potenciální vír

Vlastnosti cirkulace vektoru se využívá v mechanice kontinua ke zkoumání vektorových polí ve vyšetřované oblasti. Chceme-li zjistit o vektorové veličině $a^{\vec{}}$ zda je gradientem nějaké potenciální funkce, tak jedna z možností je provést jeho cirkulaci a z výsledku rozhodnout zda se jedná či nejedná o gradient potenciální funkce. Jestliže by se ale cirkulace nerovнала nule, neznamená to hned, že jsme narazili na vektor, který není gradientem potenciální veličiny. Vzpomeňme na definici

gradientu potenciální funkce, kde je podmínkou, aby potenciální funkce byla definována v celé vyšetřované oblasti Ω . Takže stačí, aby uvnitř křivky, podle které provádíme cirkulaci vektoru, existoval jediný bod (nebo oblast, například ryba v rybníce), kde nemá potenciální funkce řešení a cirkulace vektoru je různá od nuly [Maštovský, 1964, s. 220]. Pokud ale tvar křivky, po které integrujeme upravíme tak, aby tuto nedefinovanou oblast obcházela, tak cirkulace opět vyjde nula (viz příklady potenciálního proudění na Obrázku 54). Všimněte si, že cirkulace rychlosti po křivce L v obou případech je různá od nuly, protože uvnitř je těleso (profil), respektive střed- S , ve kterém není rychlost V definována. V případě Obrázku 54(b) se potenciální proudění po soustředných kruzích s uvedenou rovnicí pro rozložení rychlosti nazývá potenciální vír.

54:



(a) cirkulace rychlosti kolem obtékaného tělesa; (b) potenciální vír. a_1 [$m^2 \cdot s^{-1}$] konstanta; V_θ [$m \cdot s^{-1}$] obvodová složka rychlosti; K , L -křivky, po kterých je provedena cirkulace rychlosti. Více informací o potenciálním víru a odvození rovnice pro obvodovou rychlost je uvedeno v Příloze 11.

Vztlak
Poloměr potenciálního víru

Na druhou stranu, víme-li zcela jistě, že vyšetřovaná vektorová veličina je gradientem nějaké potenciální funkce a jeho cirkulace je přesto různá od nuly, pak to může znamenat, že uvnitř křivky, podle které cirkulace byla provedena je těleso. Hodnota cirkulace vektoru je pak údaj jeho nějaké charakteristické vlastnosti (například v aerodynamice se jedná o vztlak). V případě potenciálního víru je to údaj o poloměru integrační křivky od jeho středu, ve kterém nelze definovat rychlost, viz Obrázek 54(b).

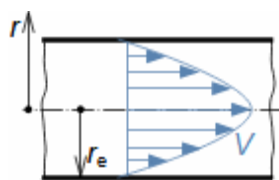
Vektorová veličina vs. skalární veličina
Nepotenciální vektorové pole
Skalární pole
potenciální veličiny

V technické praxi se můžeme setkat s případy, kdy nějaká veličina je potenciální, protože je funkcí pouze souřadnic, ale současně její vektor nevytváří potenciální vektorové pole. Typickým příkladem jsou veličiny, které známe jak skalární tak i vektorové. Například laminární proudění v potrubí, jehož rychlost je funkcí pouze souřadnic (kvadratická funkce), ale vektor rychlosti není gradientem potenciální funkce. Samozřejmě gradient rychlosti už potenciální vektorové pole vytváří, viz Úloha 12. To platí i širěji pro různé druhy veličin, kdy ve

vymezené oblasti kontinua se mohou nalézat veličiny tohoto kontinua potenciální a nepotenciální.

Úloha 11: Určete rovnici pro stanovení obvodové složky rychlosti tekutiny, která se pohybuje po kruhové dráze kolem středu S . Předpokládejte, že toto proudění je potenciální – jedná se o tzv. potenciální vír. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 11.

Úloha 12: Určete gradient rychlosti laminárního proudění a stanovte rovnici pro přírůstek rychlosti. Proved'te cirkulaci vektoru rychlosti laminárního proudění po uzavřené křivce a rozhodněte, jestli má vektor rychlosti potenciál. Řešte případ laminárního proudění v potrubí, ve kterém je rozložení rychlosti podle přiložené rovnice. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 12.



Obrázek k Úloze 12: V [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost na počítaném poloměru; \bar{V} [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] střední rychlost proudění; r [m] poloměr; r_e [m] poloměr potrubí. Rovnice je převzata z článku Vnitřní tření tekutiny a vývoj mezní vrstvy [Škorpič, 2023a]

Potenciál vektoru
Potenciál gravitačního zrychlení

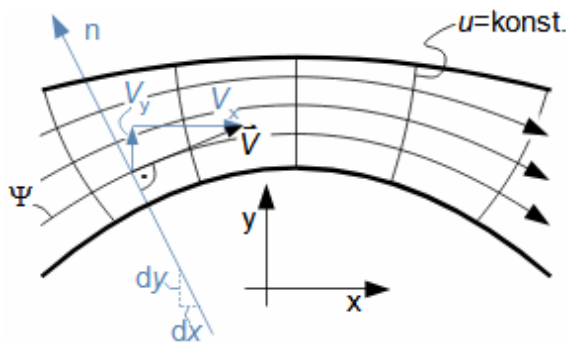
Jestliže vektor a^{\rightarrow} je gradientem potenciální funkce u ($a^{\rightarrow} = \nabla u$), pak lze zjistit původní funkci popisující veličinu u podle Vzorce 51. Respektive lze psát $du = a_x dx + a_y dy + a_z dz$ a integrací získat funkci pro u , kterou nazýváme potenciálem vektoru a^{\rightarrow} . Například víme, že vektor gravitačního zrychlení Země vytváří také potenciální vektorové pole a existuje tedy i potenciál gravitačního zrychlení apod.

Potenciální proudění
Potenciál vektoru rychlosti
Proudnice
Nepotenciální proudění

Výše uvedený poznatek lze aplikovat třeba na potenciální proudění. Bude-li vektor rychlosti proudění $V^{\rightarrow}(V_x, V_y, V_z)$ gradientem funkce u , pak lze z funkce u sestavit skalární hladiny ($u = \text{konst.}$, $du = 0$) a kolmo k těmto hladinám lze sestavit i proudnice takového proudění, jak názorně ukazuje Úloha 13, viz také příklady v [Maštovský, 1964, obr. 208], [Macur, 2010, s. 388]. Naopak, u nepotenciálního proudění nejsou proudnice kolmé na hladinu rychlosti.

Úloha 13: Odvoďte tvar funkce u jejíž gradient je vektor rychlosti potenciálního proudění $V^{\rightarrow}(V_x; V_y; V_z)$ a rovnici pro proudnice takového proudění, respektive definujte vlastnosti proudnice. Uvažujte proudění v rovině, viz přiložený obrázek. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 13.

Potenciál vektoru rychlosti
Proudnice



$V \rightarrow$ [$m \cdot s^{-1}$] rychlost a její složky; u [$m^2 \cdot s^{-1}$] potenciální veličina, která je funkcí polohy – její gradient je vektor rychlosti proudění; ψ -proudnice (trajektorie proudění); n -normála křivky proudnice.

Užití divergence vektoru v rovnicích zachování

Definice divergence vektoru

Divergence vektoru je součet derivací jednotlivých složek vektoru $a \rightarrow (a_x, a_y, a_z)$ výsledkem je tedy číslo neboli skalár [Rektorys et al., 2003, s. 228], viz Vzorec 55.

55: (a) $div \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{a}$

(b) $div \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_a}{\partial a} = \nabla \cdot \vec{a}$ $\nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial (r)}{\partial r} \vec{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial a} \vec{k}$

(a) v pravouhlé soustavě souřadnic; (b) ve válcové soustavě souřadnic. V případě divergence ve válcové soustavě souřadnic se vychází z Rovnice 42 pro parciální derivace ve válcové soustavě souřadnic.

Rovnice kontinuity
 Stacionární proudění
 Nestacionární proudění
 Zákon zachování toku

Divergence vektoru se používá pro bilance objemu tekutiny v okolí vyšetřovaného bodu při stacionárních stavech. Například je-li $a \rightarrow$ vektor průtoku tekutiny jednotkovou plochou stacionárního proudění ($a \rightarrow = \rho \cdot V \rightarrow$, kde ρ [$kg \cdot m^{-3}$] je hustota), pak součet derivací složek tohoto vektoru bude roven nule $div a \rightarrow = 0$. To znamená, že sníží-li se průtok v jednom nebo dvou směrech, musí se v dalším směru/směrech zvýšit, aby byl celkový průtok kolem vyšetřovaného bodu zachován [Rektorys et al., 2003, s. 228]. Proto lze divergenci vektoru použít pro zápis rovnice kontinuity. Jestliže by byla divergence tohoto vektoru různá od nuly, pak to znamená, že se v okolí vyšetřovaného bodu mění množství tekutiny, respektive se mění hustota – jedná se o nestacionární proudění. V takovém případě bude hodnota divergence odpovídat změně hustoty tekutiny v tomto bodě v čase. Divergenci lze ale také použít pro prostorový popis zákona zachování jakéhokoliv druhu toku.

Tenzor a jeho interpretace v technice

Tenzor vs. vektor

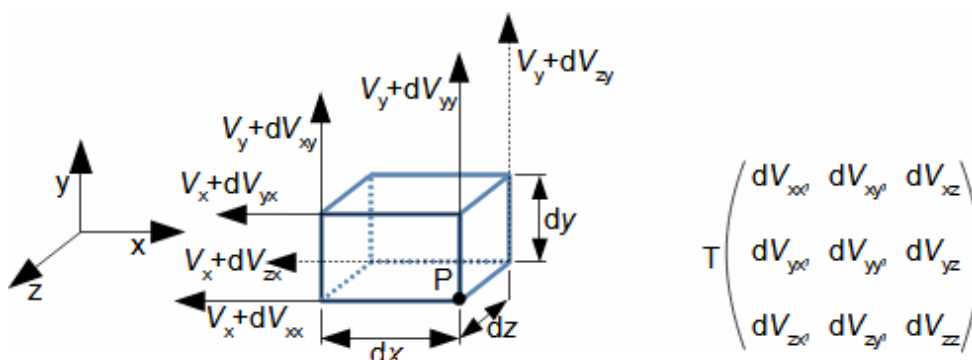
Při řešení některých úloh v mechanice kontinua již nevystačíme pouze s vektorem a jeho třemi složkami. V předchozím případě, když jsem probírali divergenci, tak jsme sledovali změny jednotlivých složek vektoru pouze v jejich

Složky tenzoru

směrech, ale v tenzorovém počtu se sledují i změny složek ve zbývajících dvou směrech.

Tenzorový počet umožňuje sledovat přírůstky složek vektoru ve všech směrech, tedy $du_{xx}, du_{yx}, du_{zx}, du_{xy}, du_{yy}, du_{yz}, du_{zx}, du_{zy}, du_{zz}$ (první index označuje proměnnou, podle které derivujeme, druhý index označuje směr přírůstku), můžeme takovou funkci derivovat nejen ve směru proměnné, ale i kolmo na ni – jednotlivé přírůstky můžeme nazvat složkami tenzoru, podobně jako jsou složky vektoru a zapsat je do matice, kterou nazýváme tenzorem. To znamená, že přírůstek v každém směru je ještě závislý na zbývajících dvou souřadnicích, jak je ukázáno na Obrázku 56. Tenzor v prostoru má devět složek (ale mimo třírozměrný prostor lze stanovit i větší tenzory [Rektorys et al., 2003], [Macur, 2010]).

56:



Příklad znázornění složek tenzoru: vlevo-Je znám vektor rychlosti v okolí bodu P, který má tři složky V_x, V_y a V_z a zajímá nás změna těchto složek v malé vzdálenosti od bodu P. V takovém případě se složka V_x změní při posunutí ve směru osy x od dV_{xx} , ve směru osy y od dV_{yx} a ve směru osy z od dV_{zx} apod. pro ostatní složky. Pro zachování přehlednosti nejsou na obrázku zakresleny přírůstky složky rychlosti V_z .
vpravo-Zápis tenzoru přírůstků rychlosti.

Napětí
Deformace
Rotace vektoru

Tenzory se používají například pro kompletní popis napětí a deformace tělesa. Nicméně, jak už bylo v předchozím odstavci uvedeno tenzory nepředstavují jen formu zápisu, ale také reálné souvislosti o změnách vyšetřované veličiny, jak ukazuje například veličina rotace vektoru, jejíž podstata a odvození je v následující kapitole.

Rotace vektoru jako nástroj k odhalení vírového pohybu

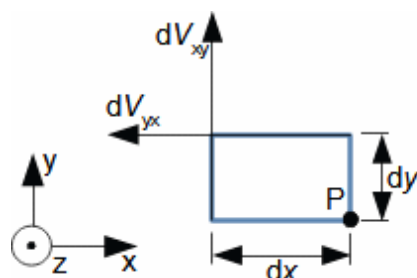
Nerovnováha
Vírový pohyb
Turbulence

Jestliže jsou přírůstky veličin v paralelních směrech nenulové, pak to znamená, že kolem vyšetřovaného bodu může nastat silová nerovnováha, která kontinuum deformuje, nebo v případě tekutin může dokonce rotovat kolem vyšetřovaného bodu – pak bychom hovořili o vírovém pohybu tekutiny neboli turbulenci.

Úhlová rychlost
elementu

Rotace tekutiny může nastat, jestliže přírůstky složek rychlosti mimo normálové směry jsou nenulové. Z jejich velikosti lze vypočítat i úhlovou rychlost otáčení tekutiny. Úhlovou rychlost otáčení elementu tekutiny kolem vyšetřovaného bodu P lze stanovit velmi snadno – podívejme se na Obrázek 57, kde je zobrazen element tekutiny zjišťujeme zda se bude otáčet kolem bodu P, který se nachází v jeho pravém dolní rohu (uvažujeme pro jednoduchost rotaci jen kolem osy z). Obecně se úhlová rychlost rotace stanoví jako podíl obvodové rychlosti ku ramenu (vzdálenost od osy rotace zapsáno ve tvaru $\omega = U \cdot r^{-1}$, kde ω [rad·s⁻¹] je úhlová rychlost; U [m·s⁻¹] je obvodová rychlost – viz také Vzorec 19; r [m] je rameno). V případě vyšetřování rotace v nejbližším okolí bodu P, kde je rychlost tekutiny $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$, musí obvodová rychlost odpovídat přírůstku rychlosti na ramenu rovnu diferenciálu vzdálenosti od bodu P. Samozřejmě, že v případě vyšetřování rychlosti proudění tekutiny má vyšetřování její rotace smysl pro tak velké okolí bodu P, kdy se neprojeví termokinetický pohyb molekul nad pohybem proudění látky jako celku.

57:



$$(a) \omega_{z1} = -\frac{dV_{yx}}{dy} = -\frac{\partial V_x}{\partial y}$$

$$(b) \omega_{z2} = \frac{dV_{xy}}{dx} = \frac{\partial V_y}{\partial x}$$

$$(c) \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

(a) úhlová rychlost rotace elementárního objemu podle přírůstku složky rychlosti V_x ve směru osy y; (b) úhlová rychlost rotace elementárního objemu podle přírůstku složky rychlosti V_y ve směru osy x; (c) přírůstky od jednotlivých složek rychlosti i velikost ramen se mohou měnit a tedy i úhlové rychlosti (v tomto případě působí dokonce proti sobě), proto výsledná úhlová rychlost se bere jako jejich průměr. Viz také postup v [Maštovský, 1964], [Garaj, 1957], [Hemzal, 2001, s. 1-3]. Přírůstky dV_{xx} , respektive dV_{yy} a dV_{zz} nemohou být obvodovými rychlostmi, protože jejich směr prochází bodem P, nemají k tomuto bodu rameno.

Definice rotace vektoru
Vírové vektorové pole

Vyšetřování rotace nejen kontinua, ale třeba i energetických polí je natolik používaná operace, že pro tento účel vznikl obecný vzorec zvaný rotace vektoru odvozený a uvedený pod označení Vzorec 58. Vektorové pole (v našem případě nejčastěji rychlosti) s nenulovou rotací se nazývá vírové vektorové pole [Garaj, 1957, s. 202].

58: (a) $\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \nabla \times \vec{a}$

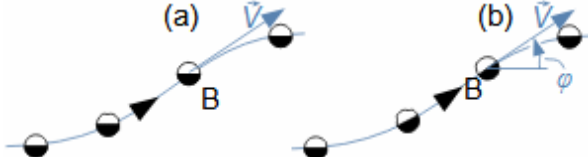
(b) $\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \right) \vec{j} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{k} = \nabla \times \vec{a}$

(a) rotace vektoru v pravoúhlé soustavě souřadnic; (b) rotace vektoru ve válcové soustavě souřadnic. Ve vzorcích pro rotaci vektoru chybí (respektive se vynechává) před každou složkou konstanta 1/2 takže, jestliže je rotace vektoru na vyšetřované oblasti Ω nenulová $\text{rot } \vec{a} \neq 0$ znamená to, že látka ve vyšetřovaném bodě, respektive v jeho okolí se otáčí kolem tohoto bodu jako celek, přičemž délka vektoru $\text{rot } \vec{a}$ je dvojnásobek úhlové rychlosti této rotace ($2 \cdot \omega$) a vektor \vec{a} je rychlost látky. Odvození rotoru rychlosti je v Příloze 19.

Nevírový a vírový pohyb tekutiny
Potenciální vektorové pole
Potenciální proudění

Dosazením definice gradientu funkce do rovnice rotace vektoru lze velmi snadno odvodit, že rotace potenciálního vektorového pole je nulová (Rovnice 59). Znamená to, že při potenciálním proudění jednotlivé elementární objemy tekutiny nerotují, pouze konají posuvný pohyb, říkáme mu nevírový nebo též translační pohyb, naopak jiný druh proudění, kdy se elementární objemy při pohybu natačí nebo přímo otáčí se nazývá vírový pohyb. Oba pohyby jsou názorně porovnány na Obrázku 60.

59: $\vec{a} = \text{grad } u \Rightarrow \text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \vec{0}$ Důkaz platnosti této rovnosti je proveden v Příloze 20.

60:  (a) charakter nevírového proudění (částičky proudící látky konají pouze posuvný pohyb v celém vyšetřovaném objemu); (b) charakter vírového pohybu – částičky pohybující se látky se otáčí kolem vyšetřovaného bodu B a zároveň mohou konat i posuvný pohyb (posuvnou část pohybu lze popsat potenciální funkcí).

Vírový vs. nevírový pohyb tekutiny

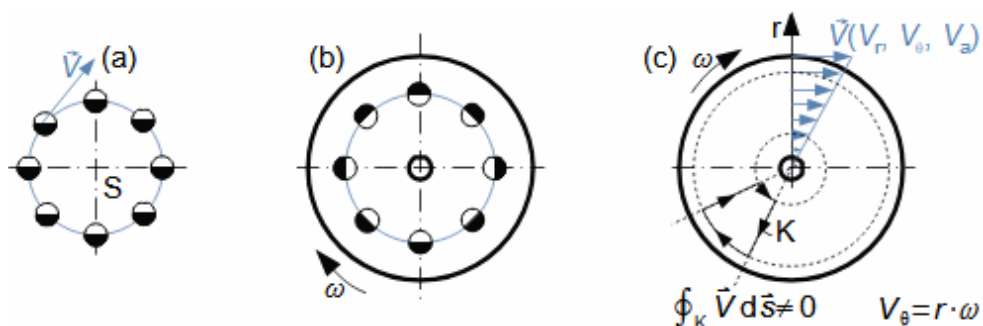
Definice nevírového proudění usnadňuje řešení především energetických a silových bilancí proudění. Rotace látky ve vyšetřovaném bodě totiž může spotřebovávat či produkovat energii, která ovlivňuje i posuvný pohyb, proto jsou-li tyto vlivy malé lze s dostatečnou přesností aplikovat rovnice nevírového proudění i na proudění, které očividně nevírové není, například případy $\text{rot } \vec{a} = \text{konst.}$, $\text{rot } \vec{a} \approx 0$ v celém vyšetřovaném objemu.

Setrvačnick vs. potenciální vír

V technické praxi se lze velice často setkat s pohybem látky po kružnici nebo trajektoriím blízkým kružnicím. Typickým příkladem je osově symetrické proudění či rotace disku setrvačnicku. Zatím co lze dokázat, že rychlostní pole hmoty setrvačnicku vytváří vírové pole (ano je skutečně tomu tak a jakýkoliv vybraný elementární objem setrvačnicku rotuje úhlovou rychlostí odpovídající úhlové rychlosti setrvačnicku), tak potenciální vír samozřejmě takové pole nevytváří (Obrázek 61) a

rotor rychlosti v potenciálním víru je roven nule [Maštovský, 1964, s. 219].

61:



(a) charakteristika pohybu tekutiny v potenciálním víru kolem středu S; (b) rotace hmoty setrvačníku (hmota v bezprostředním okolí jakéhokoliv bodu setrvačníku rotuje kolem osy rotace s úhlovou rychlostí ω), rot $\vec{V} \neq 0$; (c) rovnice pro kruhový pohyb pevného disku setrvačníku je převzata z [Macháček, 1995, s. 42] – tato rovnice je odlišná od rovnice pro potenciální vektorové pole rychlosti, takže vektorové pole rychlosti nemůže být nevírové, lze také dokázat, že uvedená rovnice pro rychlost není gradientem žádné funkce, proto i cirkulace rychlosti po uzavřené křivce K je různá od nuly.

Matematické stroje neboli počítače

Univerzálnost
matematických
postupů

Alan Turing

Program

Instrukce

Operační znak

Adresa

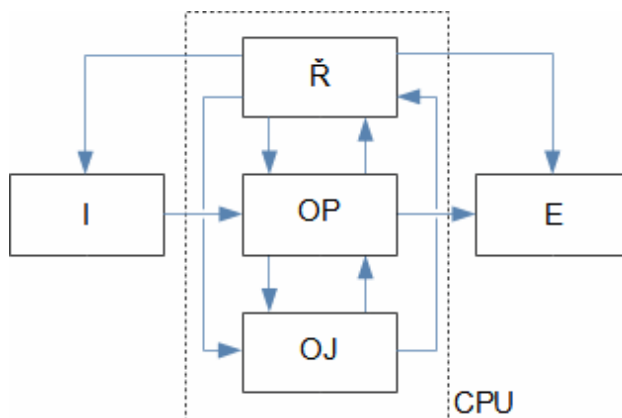
John von Neumann

Matematické postupy se vyznačují svou univerzálností, proto není divu, že se postupně objevovaly úvahy do jaké míry lze sestavit stroje, které by samy počítaly – vynechme různé pomůcky a strojky pro základní aritmetické operace. Touto otázkou se zabýval i anglický matematik Alan Turing (1912-1954), který dokázal že řešení matematické úlohy lze provést strojem lze-li ji zapsat do tzv. programu [Mareš, 2006, s. 305], [Gleick, 2013, s. 171], [Naumann, 2009, s. 371]. Program je postup výpočtu pro stroj, jeho elementární jednotkou je instrukce neboli pokyny pro stroj jakou operaci má provést zapsané v pořadí v jakém se budou provádět. Každá instrukce musí obsahovat jeden operační znak (každá samostatná operace, které je stroj schopen má svoje číslo, kterému se říká operační znak) a adresu jednotky počítače, která má operaci provést (kam ho uložit – do jaké části počítače) nebo naopak odkud vzít údaj pro zpracování.

Blokové schéma
univerzálního
počítače

Strojový celek schopný pracovat podle programu se nazývá univerzální samočinný počítač. Takový matematický stroj obsahuje minimálně pět samostatných mezi sebou komunikujících jednotek: řadič, operační paměť, vstup, výstup, operační jednotku, viz [Obrázek 62](#).

62:



Ř-řadič; OP-operační paměť; I-vstup; E-výstup; OJ-operační jednotka; CPU-centrální procesorová jednotka (Central Processing Unit). Jedná se o schéma počítače, které navrhl americký matematik John von Neumann (1903-1957). Tento typ počítače obsahuje pět jednotek, takže instrukce programu může mít pět různých

adres. Existují i jiná bloková schémata počítače, ale velmi podobná.

Řadič

Řadič je jednotka, která je schopna přečíst program. Na základě instrukcí v programu rozesílá požadavky do dalších čtyř jednotek. Existují počítače, které nemají cestu z operační paměti do řadiče. U těchto počítačů je program uložen v řadiči a nelze ho měnit nebo má svůj vlastní vstup pro změnu programu z vnějšku. Tak tomu bylo i v raných dobách stavby počítačů. Současné počítače obsahují i několik časově synchronizovaných řadičů. Konstrukce řadiče je uvedena například v knihách *Matematické stroje, Vzor v kameni* [Gecsei et al., 1964, s. 154], [Hillis, 2003].

Operační paměť

Operační paměť, dříve jen paměť, je schopna uchovávat čísla, tj. mezivýsledky, výsledky a i program, který je také napsán ve formě čísel. Do ni může zapisovat řadič, operační jednotka i vstupní zařízení. Od řadiče může dostat příkaz k odeslání čísla do výstupní jednotky.

Vstup

Vstupem do zařízení se rozumí zařízení, kterým se dostávají čísla nebo i program do paměti (například klávesnice, měřicí čidla apod).

Výstup

Výstupem ze zařízení se rozumí zařízení, kterým se ukládají/zobrazují/zapisují konečné výsledky (například tiskárna, monitor, paměť apod). Vstupy a výstupy určené pro lidské smysly jsou tomu uzpůsobeny.

Operační jednotka

Operační jednotka je zařízení, jehož konstrukce zvládá početní operace jak základní aritmetické tak logické, proto se jí také říká aritmeticko-logická jednotka. Počet operací, které tato jednotka zvládne přímo je dána její konstrukcí. Obvykle umí přímo základní aritmetické operace. Například pokud má obvody pro násobení, tak násobí přímo (v programu je napsáno násob dvě čísla a operační jednotka ví jak to má udělat – má pro to číslo operace). Jestliže obvod pro násobení nemá musí program obsahovat i postup násobení obvody, které k dispozici má. Dnešní počítače mohou obsahovat i několik operačních jednotek.

Operační kód	<p>Konstrukce operační jednotky je popsána např. v knize <i>Matematické stroje</i> [Gecsei et al., 1964, s. 148].</p> <p>Množství operací, kterých je matematický stroj schopen záleží na jeho konstrukci. Seznam těchto možných operací se nazývá operační kód. Čím větší je operační kód stroje tím je rychlejší a jeho programování snazší na druhou stranu je složitější a dražší. Turing dokázal, že nejjednodušší počítač, který by dokázal splnit jakkoliv složitý výpočet – cokoliv lze spočítat to spočítat dokáže – by měl operační kód o velikosti 6. Takový stroj dnes nazýváme Turingovým strojem.</p>
Turingův stroj	<p>Turingův stroj by obsahoval řadič s programem, nekonečnou pásku pro zápis/čtení výsledků, čtecí, záznamové, posouvací a mazací zařízení. Na pásce by byl záznam ve dvojkové soustavě, která je minimalistická co se týká množství potřebných znaků [Gleick, 2013, s. 169]. Operační kód by vypadal takto: (1) posun pásky o jedno políčko doleva; (2) posun pásky o jedno políčko do prava; (3) zaznamenat symbol 0; (4) zaznamenat symbol 1; (5) smazat zaznamenaný symbol; (6) zastavit se [Gecsei et al., 1964, s. 87]. Jedná se o jednoduchý stroj, ale jeho programování by bylo obtížné a úlohy by plnil velmi pomalu.</p> <p>Z pohledu fungování, lze počítače rozdělit ještě na analogové a číslicové neboli digitální.</p>
Analogové počítače	<p>Analogové počítače pracují na principu velikosti signálů, kterým může být síla, napětí, tlak, posun apod. Například pro násobení by mohlo být používáno logaritmické pravítko, u kterého by se snímal posuv. Je očividné, že složitější analogový počítač by byl náchylný na chyby a poruchy [Gecsei et al., 1964], které by souvisely s přesností výroby a dnes se prakticky používají jen jako neuniverzální jednoúčelové stroje, například pro regulaci.</p>
Číslicové/digitální počítače George Boole	<p>Číslicové počítače pracují na principu nějaký signál/žádný signál (posun, napětí, tlak, síla), respektive rozlišují pouze dva stavy a nikoliv sílu signálu. Počítání pouze se dvěma možnými stavy lze díky Booleovy algebře [Gecsei et al., 1964, s. 105]. Tuto algebru vytvořil anglický matematik George Boole (1815-1864) při popisu se obvykle tyto stavy označují symboly či výrazy 0/1, ano/ne apod.</p>
Zápis programu Programovací jazyk Kompilační program Řadič Software	<p>Velikost a způsob zápisu programu počítače závisí na jeho operačním kódu případně i na výrobci. Během desítek let vývoje počítačů ale došlo k vývoji normovaných programovacích příkazů neboli vzniku programovacích jazyků, těch je více. Takový programovací jazyk je lépe srozumitelný lidem použitím mnohem širší sady symbolů než 0/1 (nejčastěji zkratky anglických slov). Program napsaný v tomto jazyce potom jiný,</p>

tzv. kompilační program, automaticky přepisuje do konečného programu pro počítač. Dříve se vkládal program přímo do řadiče dnes ho tam vkládá automaticky speciální program. Programové vybavení počítače se cizím, ale frekventovaným, slovem nazývá software.

Matematický softwar

Hlavní přesnou výpočetní pomůckou technika je počítač případně kalkulačka. Z pohledu uživatele není podstatná samotná konstrukce a princip matematických strojů, ale jejich způsob komunikace s uživatelem, tj. forma zadání a forma výsledků, což zajišťuje v tomto případě matematický software. Matematický software lze rozdělit podle výpočetní metody, pro kterou je primárně určen, těmito metodami jsou analytické výpočetní metody a numerické výpočetní metody. Obě metody může provádět i člověk "ručně", ale zejména u těch rozsáhlých numerických úloh bude mnohem pomalejší než počítač.

Analytické výpočtové metody

Software pracující s analytickými metodami pracuje přímo s funkčními závislostmi mezi jednotlivými proměnnými a vztahy mezi nimi. Požadovaným výsledkem je nový tvar funkční závislosti. Například analytické řešení rovnice $a_1 \cdot x + a_2 = a_3$ je $x = (a_3 - a_2) / a_1$. Celý proces probíhá v několika krocích, kdy výpočtář zadá tvar rovnice, definuje co je konstanta, co proměnná a jaký tvar výsledku je požadován (v tomto případě vyjádření proměnné x) a následuje krok softwaru, který vygeneruje řešení, viz Obrázek 63. Počet nutných kroků se podle softwaru může lišit, velmi záleží na tom jakou vlastnost software přiřazuje jednotlivým znakům, které lze při zápisu rovnice použít. Představitelem tohoto typu softwaru je například Maple (Maple, Computer Algebra Systems; Maplesoft™). Tento typ softwaru obvykle dokáže zpracovat většinu algebraických úloh a například umí nalézt řešení i neurčitých integrálů apod. Jestliže je požadován číselný výsledek stačí zadat hodnoty konstant.

63:	01: $a \cdot x = b$	04: $b = \text{con}$	Základní kroky při řešení rovnice analytickým softwarem: Na obrázku je analytické řešení lineární rovnice o jedné neznámé, která je uvedena na <u>Obrázku 32</u> . Zkratka var označuje proměnnou; zkratka con konstantu.
	02: $x = \text{var}$	06: $x = ?$	
	03: $a = \text{con}$	07: $x = \frac{b}{a}$	

Numerické metody

Software pro numerické výpočetní metody se obvykle omezuje pouze na číselné řešení zadané úlohy (bez algebraických úprav). K tomu využívá buď přímé metody výpočtu, nebo iterační metody výpočtu.

Přímé numerické výpočty

V případě přímé metody výpočtu musí být zadán výpočetní vzorec v použitelné podobě, například $x = (a_3 - a_2) / a_1$. Vyčíslení může proběhnout zadáním konstant $a_{1..3}$. Mezi typické softwary

Tabulkový procesor

podporující i přímé numerické výpočty patří tabulkové procesory, ve kterých se jednotlivé konstanty a vzorce zadávají do buněk s unikátní adresou, viz [Obrázek 64](#). Tabulkovým procesorem je například produkt Calc, který je součástí kancelářských balíků OpenOffice.org a LibreOffice nebo Exel z Microsoft Office.

64: 01: $3 = a_1$
 02: $1 = a_2$
 03: $7 = a_3$
 04: $\frac{a_3 - a_2}{a_1} = 2 = x$

	A	B
1	a1	3
2	a2	1
3	a3	7
4	x	=(B3-B2)/B1

Kroky při výpočtu vzorce numerickým softwarem užitím přímé metody: vlevo-obecný zápis; vpravo-způsob zápisu v tabulkovém procesoru.

Nepřímé (iterční) metody

Metoda konečných prvků

Mezi software určený pro iterační metody patří i softwary metody konečných prvků (MKP) používané v mechanice kontinua pro zjištění napětí v součásti, či tvaru proudového pole tekutiny a pod. (v těchto případech se výpočet ukončuje po splnění okrajových podmínek). Většina softwarů nedokáže jen podle tvaru rovnice určit iterační metodu (například porovnáním podobnosti s jinými úlohami uložených v knihovně softwaru). Tuto metodu musí vybrat výpočtář včetně logické podmínky ukončení výpočtu. Zadání iteračního výpočtu je náročnější než u předchozích metod, nicméně lze jej zadat (naprogramovat) i v tabulkovém procesoru či programovatelné kalkulačce.

Nepřímá metoda Monte Carlo

Software pracující na principu metody Monte Carlo obsahuje algoritmus, který náhodně testuje různá řešení. Následně matematický software různými postupy dosazuje různá čísla do rovnice jehož řešení hledá a vyhodnocuje zda se od řešení vzdaluje nebo přibližuje a tak neustále zužuje oblast, ve kterém je hledán výsledek. Na typu metody zužování oblasti, kde by mohl ležet výsledek podstatně závisí konvergence výpočtu, protože čím je větší oblast, ve které se hledá výsledek, tím je menší pravděpodobnost, že bude nalezen. V knize Matematické stroje [Gecsei et al., 1964] přirovnávají autoři metodu Monte Carlo k myšlenkovým pochodů člověka s tím, že lidská mysl má zatím neznáme metody pro zužování oblastí, ve které se nachází množina možných řešení. Je zřejmé, že metoda Monte Carlo je nejvíce náročná na rychlost hardwaru počítače. Pomocí této metody se řeší i diferenciální rovnice.

Úloha 14: Sestavte jednotlivé kroky výpočtu dekadického logaritmu čísla 324 s přesností na čtyři desetinná místa, které následně převed'te do vámi zvoleného programovacího jazyka. Využijte k tomu nekonečnou řadu pro stanovení přirozeného logaritmu, viz příložená rovnice. Řešení úlohy je uvedeno v [Příloze 14](#), (řešení obsahuje zápis v programovacím jazyce, který používá kalkulačka HP 35s).

$$\ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}$$

Vzorec nekonečné řady přirozeného logaritmu [Rektorys et al., 2003, s. 625]

Odkazy

- ŠKORPÍK, 2023a, Vnitřní tření tekutiny a vývoj mezní vrstvy, *Transformační technologie*, Brno, [online], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://fluid-dynamics.education/vnitri-treni-tekutiny-a-vyvoj-mezni-vrstvy.html>.
- ŠKORPÍK, 2023b, Vznik tlakové ztráty při proudění tekutiny a její výpočet, *Transformační technologie*, Brno, [online], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://fluid-dynamics.education/vznik-tlakove-ztraty-pri-proudeni-tekutiny-a-jeji-vypocet.html>.
- ŠKORPÍK, 2023c, Proudění plynů a par tryskami, *Transformační technologie*, Brno, [online], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://fluid-dynamics.education/proudeni-plynu-a-par-tryskami.html>.
- DEVLIN, Keith, 2003, *Jazyk matematiky*, Dokořán, s.r.o., Praha, ISBN 80-86569-09-08.
- DOBROVOLNÝ, Bohumil, ŽDÁREK, Josef, 1954, *Přehled technické matematiky*, ROH – PRÁCE, Praha.
- EVESHAM, Harold, 2010, *The History and Development of Nomography*, Docent press LLC, Boston, ISBN 1456479628
- GARAJ, Jozef, 1957, *Základy vektorového počtu*, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, n.p., Bratislava.
- GECSEI, Ján, KLÍR, Jiří, PELIKÁN, Pavel, 1964, *Matematické stroje*, Orbis, Praha.
- GLEICK, James, 2013, *Informace: Historie, Teorie, Záplava*, Argo, Praha, ISBN 978-80-7363-415-5.
- GOWERS, Timothy, 2006, *Matematika: průvodce pro každého*, Dokořán, Praha, ISBN 80-7363-083-4.
- HEMZAL, Karel, 2001, *Aerodynamika větrání*, Nakladatelství ČVUT, Praha, ISBN 978-80-01-03908-3.
- HILLIS, W. Daniel, 2003, *Vzor v kameni: jednoduché myšlenky, které řídí počítače*, Academia, Praha, ISBN 80-200-1067-X.
- JAKOVLEV, K., P., BRONŠTEJN, I., N., BALJEZIN, S., A., SVĚŠNIKOV, G., N., ZINOVĚV, V. A., 1963, *Fyzikálně technická příručka*, Praha, SNTL.
- JUNGK, Robert, 1965, *Jasnější než tisíc slunci: osudy atomových vědců*, Praha, Mladá fronta.
- KUNC, Antonín, JOZÍFEK, Vítěslav, 1963, *Matematika pro dělníky a mistry*, Statní nakladatelství technické literatury, Praha.
- MACUR, Milan, 2010, *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*, Vutium, Brno, ISBN 978-80-214-3944-3.
- MACHÁČEK, Martin, 1995, *Encyklopedie fyziky*, Mladá fronta, Praha, ISBN 80-204-0237-3.
- MAREŠ, Milan, 2006, *Slova, která se hodí, aneb, Jak si povídat o matematice, kybernetice a informatice*, Academia, Praha, ISBN 80-200-1445-4.
- MAREŠ, Milan, 2008, *Příběhy matematiky*, Pistorius&Olšanská, s.r.o., Příbram, ISBN 978-80-87053-16-4.
- MAŠTOVSKÝ, Otakar, 1964, *Hydromechanika*, Statní nakladatelství technické literatury, Praha.
- MAZUR, Joseph, 2017, *Kde se vzaly symboly: stručná historie matematického zápisu od starověku k dnešku*, Knižní klub, Universum, Praha, ISBN 978-80-242-5820-1.
- MIODOWNIK, Mark, 2016, *Neobyčejné materiály: podivuhodné příběhy látek, které vytvářejí náš svět*, Praha, Dokořán, ISBN 978-80-7363-765-1.
- NAUMANN, Friedrich, 2009, *Dějiny informatiky*, Academia, Praha, ISBN 978-80-200-1730-7.
- OPAVA, Zdeněk, 1972, *Jak sestrojovat spojnicové nomogramy*, Praha, SNTL.
- PLESKOT, Václav, 1947, *Nomografie v technické praxi*, Praha, SPASEI.
- REKTORYS, Karel, 2001, *Co je a k čemu je vyšší matematika*, Praha, Česká matice technická (Academia), ISBN 80-200-0883-7.
- REKTORYS, Karel, CIPRA, Tomáš, DRÁBEK, Karel, FIEDLER, Miroslav, FUKA, Jaroslav, KEJLA, František, KEPR, Bořivoj, NEČAS, Jindřich, NOŽIČKA, František, PRÁGER, Milan, SEGETH, Karel, SEGETHOVÁ, Jitka, VILHELM, Václav, VITÁSEK, Emil, ZELENKA, Miroslav, 2003, *Přehled užití matematiky I, II*, Prometheus, spol. s.r.o., Praha, ISBN 80-7196-179-5.

- ROBINSON, Andrew, 2008, *Jak se měří svět: příběhy z dějin měření*, Euromedia Group – Knižní klub, Universum, Praha, ISBN 9788024221878.
- SCHMIDTMAYER, Josef, 1967, *Maticový počet a jeho použití v technice*, SNTL, Praha.
- STEWART, Ian, 2013, *Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta*, Dokořán, s.r.o., Praha, ISBN 978-80-7363-292-2.
- STRUIK, Dirk, 1963, *Dějiny matematiky*, Praha, Orbis.
- ŠTĚPANSKÝ, Václav, 1970, *Nomogramy*, Praha, SNTL.
- TESAŘÍK, Bohumil, 2015, Objev logaritmů měl na vědu dopad srovnatelný s vynálezem počítače, *Technický týdeník*, 09/2015, Business Media CZ, Praha, ISSN 0040-1064.
- THIELE, Rüdiger, 1985, *Matematické důkazy*, Statní nakladatelství technické literatury, Praha.
-